МАЭУ МУРМАНСКАЯ АКАДЕМИЯ ЭКОНОМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ

УТВЕРЖДАЮ
Начальник учебно-
методического управления
Ю.В. Бирюков
«21» февраля 2018 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по выполнению домашней контрольной работы по дисциплине
ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Направление подготовки
38.03.01 «Экономика»
Направленность (профиль) образовательной программы:
«Финансы и кредит»

является единой для всех форм обучения

Мурманск, 2018

«Линейная алгебра»: Методические рекомендации по выполнению домашней контрольной работы. – Мурманск: ЧОУ ВО "МАЭУ" 2018.–30 с.

«Линейная алгебра»: Методические рекомендации по выполнению домашней контрольной работы: Предназначены для 38.03.01 «Экономика». Является единой для всех форм обучения.

1 Содержание

Введение . . . 3
1 Действия с матрицами . . . 5
2 Определитель . . . 6
3 Обратная матрица . . . 8
4 Системы линейных уравнений . . . 10
5 Комплексные числа . . . 12
6 Линейная зависимость векторов. Линейная оболочка . . . 14
7 Собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы . . . 17
Задания для контрольной работы . . . 21
Список литературы . . . 26

ВВЕДЕНИЕ

Цель курса линейной алгебры в системе подготовки – освоение необходимого математического аппарата.

Задачи изучения математики как фундаментальной дисциплины состоят в развитии логического и алгоритмического мышления, в выработке умения моделировать реальные процессы.

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Таблица 1−Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине

Код компетенции	Наименование компетенции	Вид деятельности и проф. задачи	Планируемые результаты	Уровень освоения компетенции
ОПК 3	способностью выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы		*Знать* основные определения и понятия изучаемых разделов линейной алгебры; *Уметь* Выбирать инструментальные средства, выстраивать логически верное решение поставленной задачи; представлять полученные в ходе решения задач результаты. *Владеть* навыками: решения задач линейной алгебры основами математического моделирования прикладных задач, решаемых аналитическими методами; навыками: решения задач линейной алгебры;	

			навыками решения оптимизационных задач с ограничениями.	
ПК-1	способностью собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов	**Расчетно-экономическая деятельность:** - подготовка исходных данных для проведения расчетов экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих объектов; - проведение расчетов экономических и социально-экономических показателей на основе типовых методик с учетом действующей нормативно-правовой базы.	*Знать* линейную алгебру; основные определения и понятия изучаемых разделов линейной алгебры; фундаментальные основы линейной алгебры, включая алгебру, геометрию, математический анализ, теорию вероятностей и основы математической статистики; основные математические методы и модели принятия решений	Пороговый
			Уметь Моделировать административные процессы и процедуры расширять свои математические познания; решать типовые задачи по основным разделам курса; обобщать и систематизировать информацию для создания баз данных, владеть средствами программного обеспечения анализа и моделирования систем управления; адаптировать основные математические модели к конкретным задачам управления.;	Базовый

			Владеть первичными навыками и основными методами решения математических задач при моделировании административных процессов в условиях профилизации	Продвинутый
ПК-2	способностью на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов	**Расчетно-экономическая деятельность:** - подготовка исходных данных для проведения расчетов экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих объектов; - проведение расчетов экономических и социально-экономических показателей на основе типовых методик с учетом действующей нормативно-правовой базы.	*Знать* фундаментальные основы высшей математики, линейную алгебру, геометрию, математический анализ, теорию вероятностей и основы математической статистики; основные математические методы и модели принятия решений	Пороговый
			Уметь Моделировать административные процессы и процедуры расширять свои математические познания; решать типовые задачи по основным разделам курса; обобщать и систематизировать информацию для создания баз данных, владеть средствами программного обеспечения анализа и моделирования систем управления; адаптировать основные математические модели к конкретным задачам управления.;	Базовый

			Владеть: первичными навыками и основными методами решения математических задач при моделировании административных процессов в условиях профилизации	Продвинутый

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Цель контрольной работы – закрепление основных теоретических положений курса «Линейная алгебра».

Методические рекомендации содержат краткие теоретические сведения и примеры решения задач, которые помогут при выполнении контрольных работ. Следует отметить, что этих сведений недостаточно. Список рекомендуемой литературы приведен в конце.

При выполнении контрольной работы и представлении ее на проверку студент должен руководствоваться следующими правилами.

1. Номер варианта контрольной работы соответствует начальной букве фамилии студента.

Начальная буква фамилии	Вариант задания
А, Е, Л	0
Р, Х, Э	1
Б, Ж, М	2
С, Ц, Ю	3
В, З, Н	4
Т, Ч	5
Г, И, О	6
У, Ш	7
Д, К, П	8
Ф, Щ, Я	9

2. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради.

3. На титульном листе должно быть указано: контрольная работа по алгебре, номер варианта, фамилия имя отчество студента, группа, фамилия преподавателя.

4. Для получения зачета по контрольной работе студент должен пройти собеседование с преподавателем, в ходе которого необходимо продемонстрировать понимание хода решения задач в своей работе.

5. Если при проверке контрольной работы обнаружены ошибки, то студент должен в той же тетради выполнить работу над ошибками и сдать ее для проверки.

6. Решение задач из контрольной работы должно быть достаточно подробным и логически последовательным.

2 Действия с матрицами

Матрица — это прямоугольная таблица чисел (элементов множества). Размером матрицы называется число ее строк и число столбцов.

$$A_{k\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Обращение к элементу матрицы происходит указанием номера строки и номера столбца. Например, элемент a_{27} (читается: а два семь) стоит во второй строке и седьмом столбце. Две матрицы называются равными, если они имеют равные размеры и их элементы, стоящие на соответствующих местах, равны.

Всякую матрицу можно *умножить на число*, для этого нужно каждый элемент матрицы умножить на это число.

Суммой двух матриц $A = \{a_{ij}\}$ и $B = \{b_{ij}\}$ одинакового размера $k\times n$ называется матрица $C_{k\times n} = \{c_{ij}\}$, такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Если число столбцов матрицы $A_{k\times n}$ равно числу строк матрицы $B_{s\times t}$ (то есть $n = s$), то определено *умножение* $A \cdot B$. Результат умножения $A \cdot B$ есть матрица $C = \{c_{ij}\}$ размера $k \times t$, для которой

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Одна из особенностей операции умножения состоит в том, что произведение матриц в общем случае некоммутативно, то есть $AB \neq BA$. Приведите пример таких матриц A и B, что $AB \neq BA$. Матрица

$$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

играет роль единицы по умножению в матрицах, то есть для любой матрицы $A_{k\times s}$, $A \cdot E_{s\times s} = E_{k\times k} \cdot A = A$. Матрица E называется *единичной матрицей*.

Операция *транспонирование* применима к любой матрице $A_{k\times n}$. Она заключается в том, что столбцы матрицы A становятся строками и наоборот, строки — столбцами. Обозначается операция транспонирования верхним индексом ^{t}, например A^t. Нетрудно заметить, что на месте ij матрицы A^t стоит элемент a_{ji} матрицы A.

Пример. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ вычислить выражение $AB^t - C^2$.

Решение.

1) $B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2) $AB^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

3) $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4) $AB^t - C^2 = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$.

3 Определитель

Существует несколько способов построения теории определителей ([1, §1.3, гл. 1], [3, §4, гл. 1; гл. 3]). Вы можете выбрать любой подход. Приведем индуктивное определение.

Определителем квадратной матрицы $A_{n \times n}$ называется число $\det A$, равное

при $n = 1$, $\det(a_{11}) = a_{11}$;

при $n = 2$, $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

предположим, что мы умеем вычислять определитель при $n = k$, тогда при $n = k + 1$, $\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1(k+1)}A_{1(k+1)}$, где $A_{1j} = (-1)^{1+j}\det($матрицы, полученной из A вычеркиванием первой строки и j-го столбца$)$.

Определитель матрицы будем обозначать либо $\det A$, либо $|A|$.

Вычисление определителя по определению вызывает ряд затруднений, связанных, в основном, с большим числом слагаемых в определении.

Используя свойства определителя (смотри [1, §1.4, гл. 1], [3, §3, гл. 3]), можно вычислить его, не прибегая к определению. Одним из таких способов вычисления является приведение определителя к треугольному виду.

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Наша задача привести матрицу к треугольному виду, то есть получить нули ниже (или выше) главной диагонали при помощи элементарных преобразований строк. Работая первой строкой, получим нули в первом столбце ниже главной диагонали. Вычтем из второй строки первую, из третьей — удвоенную первую, из четвертой — утроенную первую. Получим определитель

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

Поменяем вторую и третью строки местами, тем самым во второй строке и втором столбце получим единицу. Работать единицей гораздо удобнее нежели другим числом, так как не возникает дробей. В общем случае, получать единицу не обязательно. Заметим, что это преобразование изменит знак определителя на противоположный.

$$\det A = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

Работая второй строкой, получим нули во втором столбце ниже главной диагонали. Из третьей строки вычтем утроенную вторую, к четвертой строке прибавим вторую.

$$\det A = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix}.$$

Покажем, как, не получая единицы в третьей строке, третьем столбце, получить нули в третьем столбце ниже главной диагонали. К четвертой строке прибавим третью, умноженную на $\frac{6}{4}$.

$$\det A = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-7}{2} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что определитель треугольной матрицы равен произведению элементов матрицы, стоящих на главной диагонали. В нашем случае $-(1 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot \frac{-7}{2}) = -14$.

4 Обратная матрица

Матрица A называется *обратимой*, если существует такая матрица B, что $AB = BA = E$. Матрица B называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1}.

Критерий обратимости. Матрица A обратима тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. Более того, обратная матрица может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^t,$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение.

Предложенная формула удобна для вычисления лишь для матриц малых размеров. Например, чтобы найти обратную матрицу для матрицы размера 4×4, нужно вычислить 16 определителей порядка 3; 5×5 — 25 определителей порядка 4; и т.д.

Альтернативный способ нахождения обратной матрицы — метод Жордана-Гаусса. Справа, через вертикальную черту, от данной матрици A припишем единичную матрицу такого же размера. Действуя всей матрицей целиком, элементарными преобразованиями строк получим на месте матрицы A единичную матрицу. Тогда приписанная справа единичная матрица преобразуется в матрицу A^{-1}.

$$(A|E) \longrightarrow (E|A^{-1})$$

Пример. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.
Припишем к матрице A единичную матрицу.

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Из второй строки вычтем первую, из третий — учетверенную первую, из четвертой — утроенную первую. Получим

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 3 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & 4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Удвоим вторую строку и вычтем из нее четвертую.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 25 & 3 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & 4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Из третьей строки вычтем двадцать пять вторых строк, из четвертой — семнадцать вторых строк.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -29 & -50 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -20 & -34 & 0 & 18 \end{array}\right).$$

Из третьей строки вычтем четвертую.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -9 & -16 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -20 & -34 & 0 & 18 \end{array}\right).$$

К четвертой строке прибавим четыре третьих строки.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -9 & -16 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -56 & -98 & 4 & 46 \end{array}\right).$$

Третью строку поделим на -1, четвертую — на -2.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 49 & -2 & -23 \end{array}\right).$$

Из первой строки вычтем четвертую.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & -1 & 0 & -27 & -49 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 49 & -2 & -23 \end{array}\right).$$

К первой строке прибавим третью.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -6 & 0 & 0 & -18 & -33 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 49 & -2 & -23 \end{array}\right).$$

К первой строке прибавим шесть вторых строк.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -12 & -21 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 49 & -2 & -23 \end{array}\right).$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -12 & -21 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 9 & 16 & -1 & -7 \\ 28 & 49 & -2 & -23 \end{pmatrix}.$

5 Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

Матрицей коэффициентов при неизвестных называется матрица

$$A_{k\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$ называется *столбцом свободных членов.*

Используя введенные обозначения систему линейных уравнений можно записать в матричном виде $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$.

Решением системы называется такой упорядоченный набор $c_1, c_2, \ldots, c_n$ чисел, что при подстановке c_i вместо x_i каждое уравнение системы обращается в тождество.

Решение системы при помощи обратной матрицы. Пусть матрица A коэффициентов при неизвестных является квадратной обратимой матрицей. Тогда система линейных уравнений имеет единственное решение и его можно найти следующим образом: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Еще одним способом решения систем линейных уравнений является правило Крамера (смотри [1, §2.2, гл. 2], [3, §3, гл. 3]). Пусть матрица A коэффициентов при неизвестных является квадратной и $\det A \neq 0$. Тогда система линейных уравнений имеет единственное решение и его можно найти следующим образом: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots$, $x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$, где $\Delta = \det A$, $\Delta_i = \det($матрицы, полученной из A заменой i-го столбца, столбцом свободных членов$)$.

Универсальным способом решения систем линейных уравнений является метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных). Материал по данному разделу можно найти в [1, §2.3, гл. 2], [3, §3, гл. 1].

Пример. Найти методом Гаусса общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}.$$

Решение.

Расширенная матрица нашей системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right).$$

Элементарными преобразованиями строк приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)+3(1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+9(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 22 & 10 & -2 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-2(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right)$$

Переменные x_1 и x_2, отвечающие вершинам ступенек, являются главными, остальные переменные x_3 и x_4 — свободными. Выразим главные переменные через свободные. Для этого в расширенной матрице получим нули над главной диагональю.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\div 11} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{9}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\div(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \end{array}\right)$$

Перейдем к уравнениям и выпишем ответ.

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{11}x_3 + \frac{9}{11}x_4 = -\frac{2}{11} \\ x_2 + \frac{5}{11}x_3 - \frac{1}{11}x_4 = \frac{10}{11} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 - \frac{2}{11} \\ x_2 = -\frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 + \frac{10}{11} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 - \frac{2}{11} \\ x_2 = -\frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 + \frac{10}{11} \end{cases}$

6 Комплексные числа

Комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где a и b — вещественные числа, элемент i удовлетворяет условию $i^2 = -1$. Заметим, что элемент i является корнем уравнения $x^2 + 1 = 0$, не разрешимого над множеством вещественных чисел, и, следовательно, не принадлежит $\mathbb{R}$. i называется *мнимой единицей*.

На множестве комплексных чисел введены две операции сложение и умножение. Пусть даны два комплексных числа $z = a + bi$, $w = c + di$.

Тогда
- $z + w = (a + c) + (b + d)i$;
- $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Множество комплексных чисел мы будем обозначать через $\mathbb{C}$.

Пусть дано комплексное число $z = a + bi$. Комплексно сопряженным к числу z называется число $a - bi$ и обозначается через $\overline{z}$. Для того, чтобы вычислить выражение $\frac{w}{z}$ с комплексными числами w и z, нужно и числитель, и знаменатель умножить на комплексно сопряженное к знаменателю, В данном случае на $\overline{z}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Любое комплексное число $z = a + bi$ можно представить в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, при чем единственным образом. Такая запись называется *тригонометрической формой* комплексного числа z. Правила, по которым вычисляются r и φ довольно просты, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, φ находится из двух условий $\cos\varphi = \frac{a}{r}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r}$. Число r называется *модулем* комплексного числа z и обозначается через $|z|$. Число φ называется *аргументом* числа z и обозначается через $\arg z$. Тригономерическая форма удобна при перемножении и возведении в степень комплексного числа.

Формула Муавра. Пусть дано комплексное число $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда для любого целого числа n справедлива формула

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Извлечение корней. Пусть дано комплексное число $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда для любого натурального числа n все корни $\sqrt[n]{z}$ принадлежат множеству

$$\left\{|z|^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}), k = 0, 1, \ldots, n-1\right\}.$$

Пример. Найти комплексные корни уравнения $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Решение.

Дискриминант квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равен $D = b^2 - 4ac$. В нашем случае $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$.

Вычислим $\sqrt{D} = \sqrt{4(\cos\pi + i\sin\pi)} = \{2i, -2i\}$.

Тогда

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

Ответ: $1 \pm i$.

7 Линейная зависимость векторов. Линейная оболочка

Пусть V — пространство n-мерных векторов над $\mathbb{R}$ (см. [1, §3.2, гл. 3], [4, §1, гл. 1]). Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ пространства V называются *линейно независимыми*, если уравнение

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$$

имеет единственное нулевое решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, где для любого i элементы $\alpha_i \in \mathbb{R}$. В противном случае, система векторов называется линейно зависимой.

Пример. Являются ли векторы $a_1 = (1, 0, -1, 1)$, $a_2 = (2, 2, -1, -1)$, $a_3 = (0, 2, 1, -3)$, $a_4 = (1, 1, -1, 4)$ линейно зависимыми?

Решение.

Решим уравнение $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 = 0$ относительно переменных α_1, α_2, α_3, α_4. Подставим вместо a_i его координаты.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 0\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Решим методом Гаусса эту систему линейных однородных уравнений.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)-(1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-2(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)+3(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)-3(3)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Переменные α_1, α_2 и α_4 — главные, α_3 — свободная. Выполним обратный ход Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right). \text{ Общее решение имеет вид } \begin{cases} \alpha_1 = 2\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}.$$

Найдем ненулевое частное решение, придав свободной переменной α_3 какое-либо ненулевое решение, например 1.

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 1 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Таким образом, справедливо равенство $2a_1 - a_2 + a_3 + 0a_4 = 0$. Следовательно, векторы a_1, a_2, a_3, a_4 являются линейно зависимыми.

Линейной оболочкой системы векторов $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ из векторного пространства V над $\mathbb{R}$ называется множество линейных комбинаций данных векторов. Обозначение: $< A >$ или $Lin(A)$. Таким образом,

$$Lin(A) = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n;\ \forall i\ \alpha_i \in P\}.$$

Базисом векторного пространства V называется такая линейно независимая система $E = \{e_1, e_2, \ldots$ векторов пространства V, что любой вектор $v \in V$ есть линейная комбинация векторов из E, то есть $\exists \alpha_1$, $\alpha_2, \dots \in P$ $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots$.

Число векторов в базисе векторного пространства V называется его *размерностью* и обозначается через $\dim V$.

Пример. Найти базис и размерность линейной оболочки A системы векторов $\{a_1 = (1,0,-1,1),\ a_2 = (2,2,-1,-1),\ a_3 = (0,2,1,-3),\ a_4 = (1,1,-1,4)\}$.

Решение.

Так как система $\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$ порождает линейную оболочку A, то максимальная линейно независимая подсистема нашей системы векторов образует базис в A.

Возьмем произвольный вектор нашей системы, например a_1, и проверим линейную независимость системы, состоящей из этого вектора. Так как один вектор линейно независим тогда и только тогда, когда он не нулевой, и $a_1 \neq 0$, то система $\{a_1\}$ является линейно независимой. Вектор a_1 включаем в базис.

Берем следующий вектор, например a_2, и добавляем его к включенным в базис векторам. Проверяем линейную независимость новой системы $\{a_1,\ a_2\}$. По свойствам линейно независимой системы, два вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда их координаты не пропорциональны. Так как $\{a_1 = (1,0,-1,1)$ и $a_2 = (2,2,-1,-1)$ имеют непропорциональные координаты, то система $\{a_1,\ a_2\}$ является линейно независимой. Вектор a_2 включаем в базис.

Далее рассмотрим систему $\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ и проверим ее линейную независимость. Выпишем уравнение $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0$ и найдем все его решения.

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0 \\ 0\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(4)-(1)]{(3)+(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(4)+3(2)]{(3)-2(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Переменные α_1, α_2 являются главными, α_3 — свободная. Общее решение имеет вид $\begin{cases} \alpha_1 = 2\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$

Придав переменной α_3 значение 1, получим ненулевое решение.

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2, \\ \alpha_2 = -1, \\ \alpha_3 = 1. \end{cases}$$

Следовательно, векторы a_1, a_2, a_3 являются линейно зависимыми. Вектор a_3 не включаем в базис.

Последний шаг, проверим линейную независимость системы $\{a_1, a_2, a_4\}$. Выпишем уравнение $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_4 a_4 = 0$ и найдем все его решения. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{(4)-(1)}{\xrightarrow{(3)+(1)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\leftrightarrow(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{(4)+3(2)}{\xrightarrow{(3)-2(2)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)-3(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{(1)-(3)}{\xrightarrow{(1)-2(2)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Все переменные α_1, α_2 и α_4 — главные. Система имеет единственное нулевое решение. Векторы a_1, a_2, a_4 являются линейно независимыми. Вектор a_4 включаем в базис.

Таким образом, $\{a_1, a_2, a_4\}$ — базис линейной оболочки A. Так как базис состоит из трех векторов, то $\dim A = 3$.

8 Собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы

Пусть A — квадратная матрица. Ненулевой вектор $v \in V$ называется *собственным вектором* матрицы A, если существует такое число $\lambda \in \mathbb{R}$, что выполняется равенство $Av = \lambda \cdot v$. Число λ называется *собственным значением* матрицы A, соответствующим вектору v.

Для нахождения собственных значений используют следующее уравнение. *Характеристическим уравнением* матрицы A называется уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Множество собственных значений матрицы A совпадает с множеством решений характеристического уравнения.

Пример. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение и найдем все его решения.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислить данный определитель можно разными способами. Мы воспользуемся формулой, справедливой для матриц размера 3×3.

$$\det(A_{3\times3} - \lambda E_{3\times3}) = -\lambda^3 + Tr(A)\lambda^2 - (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda + \det A,$$

где $Tr(A)$ — след матрицы A, равный сумме диагональных элементов, A_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу ij матрицы A. Вы можете в качестве упражнения самостоятельно доказать и обобщить данную формулу для матриц произвольного размера.

В нашем случае.

$Tr([\varphi]) = 4 + (-7) + 4 = 1.$

$[\varphi]_{11}+[\varphi]_{22}+[\varphi]_{33} = \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -9 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -1+4+(-3) = 0.$

$\det[\varphi] = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

Получили уравнение: $-\lambda^3 + \lambda^2 = 0$. Решение:

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_{2,3} = 0.$$

Для каждого собственного значения λ найдем собственные векторы, решая уравнение $(A - \lambda E)x = 0$.

Для $\lambda_1 = 1$ уравнение примет вид:

$$\begin{pmatrix} 4-1 & -5 & 2 \\ 5 & -7-1 & 3 \\ 6 & -9 & 4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Данное уравнение представляет собой систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, x_3. Так как матрица коэффициентов при неизвестных имеет нулевой определитель, то данная система всегда имеет бесконечно много решений. Наша задача найти базис пространства решений, то есть фундаментальную систему решений. Решим систему методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -8 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-2(1)]{(2)-2(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(1)\cdot(-1)]{(2)+3(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)+2(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Переменные x_1, x_2 — главные, x_3 — свободная. Общее решение

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}.$$

Число свободных переменных равно размерности пространства решений. В данном случае одному. Таким образом, число линейно независимых собственных векторов, принадлежащих собственному значению λ_1 равно одному. Для того, чтобы найти этот вектор, достаточно свободной переменной придать какое-либо ненулевое решение, например 1. Тогда $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$. Любой другой собственный вектор получается из найденного вектора $(1, 1, 1)$ домножением на константу.

Для $\lambda_{2,3} = 0$ имеем уравнение:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решим систему методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & 3 & 0 \\ 6 & -9 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(2)-(1)]{(3)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -5 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-(2)]{(1)-4(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(1)\leftrightarrow(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{3(1)+2(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Переменные x_1, x_2 — главные, x_3 — свободная. Общее решение

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_3 \end{cases}.$$

Переменной x_3 придадим ненулевое решение равное 3. Получим собственный вектор $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Любой другой собственный вектор получается из найденного вектора $(1, 2, 3)$ домножением на константу.

Таким образом, собственному значению $\lambda_1 = 1$ соответствует собственные векторы $C_1(1, 1, 1)$, собственному значению $\lambda_{2,3}$ — $C_2(1, 2, 3)$.

Задания для контрольной работы

Задание № 1.

Для матриц A, B, C, D

№	A	B	C	D
1	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 9 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
0	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

вычислить (1) $AB - 2D^T$; (2) $BA - C^2$; (3) $\det C$; (4) $\det D$; (5) D^{-1}.

Задание № 2.

Вычислить определитель:

$$(1.)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix};(2.)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix};(3.)\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix};(4.)\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix};$$

$$(5.)\begin{vmatrix} 5 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{vmatrix};(6.)\begin{vmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{vmatrix};(7.)\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix};$$

$$(8.)\begin{vmatrix} -3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix};(9.)\begin{vmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};(0.)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Задание № 3.

Найти решение системы линейных уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы.

$$(1.)\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2-x_3=-1 \\ x_1+2x_2-2x_3=1 \\ -x_1-2x_2+x_3=2 \end{array}\right. \quad (2.)\left\{\begin{array}{l} x_1-2x_2-x_3=-1 \\ -2x_1+3x_2+3x_3=1 \\ -x_1+3x_2+x_3=2 \end{array}\right.$$

$$(3.)\left\{\begin{array}{l} x_1-2x_2-x_3=-1 \\ -2x_1+4x_2+x_3=1 \\ -x_1+x_2+x_3=2 \end{array}\right. \quad (4.)\left\{\begin{array}{l} x_1-2x_2-x_3=-1 \\ -2x_1+5x_2+x_3=1 \\ -x_1+x_2+x_3=2 \end{array}\right.$$

$$(5.)\left\{\begin{array}{l} x_1-2x_2-x_3=-1 \\ -2x_1+6x_2+x_3=1 \\ -x_1+x_2+x_3=2 \end{array}\right. \quad (6.)\left\{\begin{array}{l} x_1-2x_2-x_3=-1 \\ -2x_1+7x_2+x_3=1 \\ -x_1+x_2+x_3=2 \end{array}\right.$$

$$(7.)\left\{\begin{array}{l} x_1-2x_2-x_3=-1 \\ -2x_1+8x_2+x_3=1 \\ -x_1+x_2+x_3=2 \end{array}\right. \quad (8.)\left\{\begin{array}{l} x_1-2x_2-x_3=-1 \\ -2x_1+9x_2+x_3=1 \\ -x_1+x_2+x_3=2 \end{array}\right.$$

$$(9.)\left\{\begin{array}{l} x_1-2x_2-x_3=-1 \\ -2x_1+10x_2+x_3=1 \\ -x_1+x_2+x_3=2 \end{array}\right. \quad (0.)\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2-x_3=-1 \\ x_1+x_2-2x_3=1 \\ -x_1-2x_2+x_3=2 \end{array}\right.$$

Задание № 4

Найти общее решение системы линейных уравнений.

(1.) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$ (2.) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

(3.) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$ (4.) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

(5.) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$ (6.) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

(7.) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + 9x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$ (8.) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ -2x_1 + 10x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

(9.) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$ (0.) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$

Задание № 5.

Вычислить выражение:

(1.) $(1 - i) + \frac{-1+2i}{2+i}$; (2.) $(3 - i) + \frac{-2+2i}{1+i}$; (3.) $(3 - i) + \frac{-1+3i}{2-i}$;

(4.) $(2 + i) + \frac{2+3i}{3-2i}$; (5.) $(1 + 2i) + \frac{-1-3i}{2+i}$; (6.) $(-1 + 2i) + \frac{3-i}{1+i}$;

(7.) $(1 - 2i) + \frac{-1+3i}{-2+i}$; (8.) $(1 + 3i) + \frac{-3+5i}{1+i}$; (9.) $(3 - 5i) + \frac{2-6i}{-2+i}$;

(0.) $(-2 + i) + \frac{-3+5i}{-1+i}$.

Задание № 6.

Решить уравнение над полем комплексных чисел:

(1.) $x^2 + 3x + 3 = 0$; (2.) $x^2 + 2x + 3 = 0$; (3.) $x^2 + x + 2 = 0$;

(4.) $x^2 + x + 4 = 0$; (5.) $x^2 + 2x + 2 = 0$; (6.) $x^2 - x + 5 = 0$;

(7.) $x^2 - 2x + 3 = 0$; (8.) $x^2 - 2x + 2 = 0$; (9.) $x^2 + 3x + 6 = 0$;

(0.) $x^2 + 2x + 7 = 0$.

Задание № 7. В треугольнике ABC найти

- длину ребра BC,
- косинус угла BCA,
- площадь треугольника ABC,
- уравнение стороны BC

(1.) $A = (2,\ 0)$, $B = (-1,\ 1)$, $C = (2,\ -1)$.
(2.) $A = (1,\ 0)$, $B = (-2,\ 1)$, $C = (3,\ -1)$.
(3.) $A = (3,\ 1)$, $B = (-1,\ 2)$, $C = (2,\ -1)$.
(4.) $A = (2,\ -1)$, $B = (-2,\ 1)$, $C = (0,\ -1)$.
(5.) $A = (4,\ 1)$, $B = (-1,\ 2)$, $C = (0,\ -1)$.
(6.) $A = (3,\ -1)$, $B = (-2,\ 1)$, $C = (1,\ -1)$.
(7.) $A = (1,\ 1)$, $B = (5,\ 1)$, $C = (2,\ 3)$.
(8.) $A = (-2,\ 0)$, $B = (-1,\ -1)$, $C = (2,\ 1)$.
(9.) $A = (-3,\ 1)$, $B = (2,\ 0)$, $C = (2,\ -1)$.
(0.) $A = (1,\ 2)$, $B = (5,\ 1)$, $C = (3,\ -1)$.

Задание № 8. Проверить, являются ли векторы линейно зависимыми.

(1.) $\{a_1 = (1, -1, -2, 1)$, $a_2 = (2, 2, -1, -1)$, $a_3 = (1, -1, -1, 1)$, $a_4 = (1, -5, -3, 4)$, $a_5 = (-1, -2, 1, 1)\}$.

(2.) $\{a_1 = (0, -1, -2, 1)$, $a_2 = (2, 1, 2, -1)$, $a_3 = (1, -1, -1, 1)$, $a_4 = (0, -4, -6, 4)$, $a_5 = (1, -2, -1, 1)\}$.

(3.) $\{a_1 = (-1, 0, -1, 2)$, $a_2 = (-1, 3, 2, -1)$, $a_3 = (1, -3, -1, 2)$, $a_4 = (2, -9, -5, 7)$, $a_5 = (1, -2, 1, 1)\}$.

(4.) $\{a_1 = (1, 0, -1, 2)$, $a_2 = (4, -6, -4, 1)$, $a_3 = (2, 1, 6, 2)$, $a_4 = (1, 8, 15, 5)$, $a_5 = (1, -1, 1, 0)\}$.

(5.) $\{a_1 = (1, 1, -1, 2)$, $a_2 = (3, -6, -2, 1)$, $a_3 = (3, 2, 8, 2)$, $a_4 = (4, 11, 17, 5)$, $a_5 = (1, -1, 2, 0)\}$.

(6.) $\{a_1 = (1, 3, -1, 0)$, $a_2 = (-3, 1, -2, 1)$, $a_3 = (3, 2, -1, 2)$, $a_4 = (10, 6, -1, 3)$, $a_5 = (-1, -2, 1, -1)\}$.

(7.) $\{a_1 = (1, 3, -1, 0)$, $a_2 = (2, 8, -2, 1)$, $a_3 = (2, 2, -1, 2)$, $a_4 = (3, -1, -1, 3)$, $a_5 = (-1, -2, 1, -1)\}$.

(8.) $\{a_1 = (1, 3, -1, 1)$, $a_2 = (10, 8, -2, 1)$, $a_3 = (0, 4, -1, 12)$, $a_4 = (-9, 3, -1, 24)$, $a_5 = (1, -3, 1, -6)\}$.

(9.) $\{a_1 = (1, 3, -2, 1)$, $a_2 = (3, 1, 0, 1)$, $a_3 = (9, 4, -1, 4)$, $a_4 = (16, 10, -4, 8)$, $a_5 = (1, 0, 1, 0)\}$.

(0.) $\{a_1 = (1, 2, -2, 1)$, $a_2 = (3, 1, 0, 1)$, $a_3 = (6, 2, -1, 2)$, $a_4 = (10, 5, -4, 4)$, $a_5 = (1, 1, 1, 1)\}$.

Задание № 9.

Найти базис и размерность линейной оболочки системы векторов из задачи № 1.

Задание № 10.

Найти собственные векторы и собственные значения матрицы.

(1.) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (2.) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (3.) $\begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ -1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4.) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(5.) $\begin{pmatrix} 7 & 8 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (6.) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (7.) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(8.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (9.) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (0.) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Теория и решение задач (для бакалавров). Учебное пособие [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.Е. Епихин, С. ГраськинС,. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2019. — 608 с. — ISBN 978-5-406-06538-9. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/929388 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Линейная алгебра и линейное программирование для экономистов [Электронный ресурс]: учебник / О.В. Татарников, В.Г. Шершнев, Е.В. Швед. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2018. — 258 с. — Для бакалавров. — ISBN 978-5-406-05913-5. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/926173 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Математика для экономистов (математический анализ и линейная алгебра). Задачник (для бакалавров). Учебное пособие [Электронный ресурс]: учебное пособие / С.И. Макаров, М.В. Мищенко. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2018. — 358 с. — ISBN 978-5-406-06423-8. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/930056 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Дополнительная литература:

Математика (для бакалавров). Учебник [Электронный ресурс] : учебник / И.Ю. Седых, С.Я. Криволапов, А.Ю. Шевелев. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2019. — 719 с. — ISBN 978-5-406-05914-2. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/929527 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Математика для экономистов и менеджеров (для бакалавров). Учебник [Электронный ресурс] : учебник / Н.Ш. Кремер. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2019. — 480 с. — ISBN 978-5-406-03461-3. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/931154 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Математика для экономистов и менеджеров [Электронный ресурс] : учебник / Н.Ш. Кремер под общ. ред. и др. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2017. — 480 с. — Для бакалавров. — ISBN 978-5-406-03461-3. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/926385 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Математика для экономистов и менеджеров. Практикум [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2017. — 480 с. — Для бакалавров. — ISBN 978-5-

406-03462-0. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/927668 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Математика для экономистов [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.И. Макаров. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2016. — 264 с. — ISBN 978-5-406-05090-3. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/918834 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Математика для экономистов [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.И. Макаров. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2015. — 264 с. — ISBN 978-5-406-04283-0. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/918784 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Математика для экономистов. Задачник [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.И. Макаров под ред., М.В. Мищенко под ред. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2016. — 358 с. — ISBN 978-5-406-04700-2. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/918106 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Математика и информатика [Электронный ресурс] : учебное пособие / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев, В.Б. Уткин. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2017. — 361 с. — Бакалавриат. — ISBN 978-5-406-00864-5. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/922019 — ЭБС BOOK.ru, по паролю