МАЭУ МУРМАНСКАЯ АКАДЕМИЯ ЭКОНОМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ

УТВЕРЖДАЮ
Начальник учебно-
методического управления
__________ Ю.В. Бирюков
«21» февраля 2018 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по выполнению домашней контрольной работы по дисциплине

Теория вероятностей и математическая статистика

Направление подготовки:
38.03.01 «Экономика»
Направленность (профиль) образовательной программы:
Финансы и кредит

Мурманск 2018

Теория вероятностей и математическая статистика: Методические рекомендации по выполнению домашней контрольной работы / Теория вероятностей и математическая статистика – Мурманск: ЧОУ ВО «МАЭУ», 2018. -28с.

Теория вероятностей и математическая статистика: Методические рекомендации по выполнению домашней контрольной работы: предназначены для направления38.03.01 «Экономика»

Введение

Цель курса «Теория вероятностей и математическая статистика» состоит в освоение необходимого математического аппарата. Это необходимо для анализа моделирования и решения прикладных задач, с использованием ЭВМ.

Задачи изучения состоит в развитии логического и алгоритмического мышления, в выработке умения моделировать реальные процессы.

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Таблица 1 − Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине

Код компетенции	**Наименование компетенции**	**Вид деятельности и проф. задачи**	**Планируемые результаты**	**Уровень освоения компетенции**
ОПК-2	способностью осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач		*Знать* правила сбора, анализа и обработки данных, необходимых для решения поставленных экономических задач;	Пороговый
			Уметь сгруппировать исходные данные, построить ранжированный ряд, вычислить основные показатели: среднее значение, дисперсию, коэффициент корреляции.	Базовый
			Знать правила сбора, анализа и обработки данных, необходимых для решения поставленных экономических задач; *Уметь* сгруппировать исходные данные, построить ранжированный ряд, вычислить основные показатели: среднее значение, дисперсию, коэффициент корреляции.	Продвинутый
ОПК-3	способностью выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты		*Знать* методы теории вероятностей и математической статистики для обработки экономических данных;	Пороговый
			Уметь строить математическую модель поставленной задачи; анализировать и интерпретировать полученные результаты, делать выводы.	Базовый
			Владеть методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и	Продвинутый

	расчетов и обосновать полученные выводы		процессов (в части компетенций, соответствующих понятиям и методам теории вероятностей).	
ПК-2	способностью на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитать экономически е и социально-экономически е показатели, характеризую щие деятельность хозяйствующ их субъектов	Расчетно-экономическа я деятельность:	*Знать* методы теории вероятностей и математической статистики для обработки экономических данных;	Пороговый
			Уметь выполнять необходимые расчеты; обосновать полученные результаты расчетов; представлять результаты расчетов в соответствии с принятыми стандартами.	Базовый
			Знать методы теории вероятностей и математической статистики для обработки экономических данных; *Уметь* выполнять необходимые расчеты; обосновать полученные результаты расчетов; представлять результаты расчетов в соответствии с принятыми стандартами.	Продвинутый

Методические рекомендации по выполнению контрольных заданий

Теория вероятностей

Теория вероятностей - раздел математики, изучающий закономерностислучайных явлений, наблюдаемых при массовых повторениях испытаний.

1. Случайные события

Основные понятия.

Под **испытанием (опытом)** понимается осуществление некоторогокомплекса условий. **Событием** назовем всякий факт, который в результате опытаможет произойти или не произойти.

Событие Ав опыте называется **достоверным**, если при повторениях опытаоно всегда происходит.

Событие Вв опыте называется **невозможным**, если при повторениях опыта оно никогда не происходит.

Событие в опыте называется **случайным**, если при повторениях опыта оно иногда происходит, иногда нет. Случайные события обозначаются А, В, С и т.д.

Два события называются **несовместными** (**совместными**), если появление одного из них исключает (не исключает) появление другого. Несколько событий в данном опыте называются **несовместными**, если они попарно несовместны. Несколько событий в опыте называются **совместными,** если совместны хотя бы два из них.

События в опыте называются **равновозможными,** если условия их появления одинаковы и нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое.

Полной группой событий называется несколько событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

Пример 1 Опыт - бросание игральной кости; события:

A_1 - выпадение одного очка,

A_2 - выпадение двух очков,

A_3 - выпадение трех очков,

A_4 - выпадение четырех очков,

A_5 - выпадение пяти очков,

A_6 - выпадение шести очков,

B - выпадение четного числа очков,

C - выпадение более семи очков,

D - выпадение не менее трех очков,

E - выпадение не более шести.

Достоверное событие в данном опыте - E, невозможное событие - C, остальные события - случайные. Первые шесть событий A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 не могут быть выражены через более простые события и их называют элементарными событиями (элементарными исходами). Кроме того, они образуют полную группу несовместных равновозможных событий. Событие B можно выразить через более простые события: либо наступит A_2, либо наступит A_4, либо A_6; следовательно, элементарным событием событие B не является.

Два несовместных события, образующих полную группу, называются **противоположными**. Противоположные события обозначаются A и $\overline{A}$ (не A).

Пример 2. Опыт - два выстрела по мишени; события: A - ни одногопопадания, $\overline{A}$ - хотя бы одно попадание.

2. Алгебра событий

Суммой или объединением событий A_1, $A_2,...,A_n$ назовем событие,состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

$A_1+A_2+...+A_n=A_1\cup A_2\cup...\cup A_n$.

Произведением или пересечением событий A_1, $A_2,...,A_n$назовем событие,состоящее в совместном появлении всех этих событий.

$A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n$=A1∩A2∩...∩An.

Пример 3. Опыт - два выстрела по мишени. Событие A_i - попадание вмишень при i - м выстреле (i =1;2).

Тогда событие $B=A_1+A_2$ - хотя бы одно попадание, событие $C=\overline{A}_1+\overline{A}_2$– хотябы один промах, событие $D=A_1\cdot A_2$- попадание в цель дважды, $E=A_1\cdot\overline{A}_2+\overline{A}_1\cdot A_2$-ровно одно попадание.

3. Частота события и ее свойства

Если опыт воспроизведен n раз, а событие A произошло m раз, то **частотой(относительной частотой)** события A назовем$P^*(A)=\frac{m}{n}$,т.е. отношение числа испытаний, в которых появилось событие A, к числувсех испытаний.

Свойства частоты.

1) $0\le P^*(A)\le 1$, так как $0\le m\le n$, следовательно, $0\le\frac{m}{n}\le 1$

2) частота достоверного события равна 1, так как m=n.

3) частота невозможного события равна 0, так как m=0.

4) $P^*(A+B)=P^*(A)+P^*(B)-P^*(A\cdot B)$.

Условной частотой события B относительно события A, обозначение$P^*(B/A)$, назовем частоту события B при условии, что событие A уже произошло,то есть это число равно отношению числа опытов N_{AB}, в которых произошлисобытия A и B одновременно, к числу опытов N_A, в которых появилось событиеA, то есть$P^*(B/A)=\frac{N_{AB}}{N_A}$

5) $P^*(A\cdot B)=P^*(A)\cdot P^*(B/A)$.

Частота случайного события обладает **свойством устойчивости,** т.е. приувеличении числа опытов значения частоты события группируются околонекоторого числа, характеризующего возможность появления данного события вданном опыте.

4. Классическое определение вероятности события

Исход опыта называется **благоприятным** событию A, если в результате опыта событие A свершилось. **Вероятностью** события A назовем число $P(A)=\frac{m}{n}$, где m – число благоприятных событию A исходов, n – число всех исходов вданном опыте.

Пример 4. Опыт- бросание игрального кубика. Событие А- выпадениечисла очков, кратного 3. Пусть Х – число очков, тогда все возможные исходы нашего опыта: (Х=1), (Х=2), (Х=3), (Х=4), (Х=5), (Х=6), равновозможны. Всего случаев n=6, благоприятных из них m=2, следовательно,

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

5. Элементы комбинаторики

Имеется совокупность n объектов, назовем ее **генеральной совокупностью**.Из генеральной совокупности наудачу отбираем m объектов, эту отобраннуюсовокупность назовем **выборкой**.

Выборка может быть **упорядоченной,** если порядок объектов (элементов)играет роль, и может быть **неупорядоченной,** если порядок элементов роли неиграет.

Выборка может быть **без повторений**, если элементы повторяться не могут, иможет быть **с повторениями,** если элементы в выборке повторяются.

Например, телефонный номер 260-61-51 - упорядоченная выборка споторениями из десяти цифр по семи.

Упорядоченная выборка из n элементов по m называется **размещением,**неупорядоченная выборка из n элементов по m называется **сочетанием.** Числоразмещений и сочетаний с повторениями и без повторений из n элементов по mможно найти из следующей таблицы.

Таблица 1

Выборка	Упорядоченная	Неупорядоченная
Без повторений	$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$	$C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$
С повторениями	$\overline{A}_n^m = n^m$	$\overline{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!\cdot(n-1)!}$

Пример 5. Два счета из десяти выполнены с ошибками. Найти вероятностьтого, что из четырех взятых на проверку счетов один счет окажется с ошибками.

Решение.

Воспользуемся классической формулой $P(A)=\frac{m}{n}$, всего случаев $n=C_{10}^4$, так как имеем дело с неупорядоченными выборкамибез повторений, благоприятных из них $m=C_2^1\cdot C_8^3$. Следовательно,

$$P(A)=\frac{C_2^1\cdot C_8^3}{C_{10}^4}=\frac{\frac{2!}{1!\cdot 1!}\cdot\frac{8!}{3!\cdot 5!}}{\frac{10!}{4!\cdot 6!}}=\frac{1\cdot 2\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6)}{(1\cdot 2\cdot 3)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)\cdot(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10)}=\frac{56}{105}=\frac{8}{15}$$

Запомните: 0!=1.

6. Основные теоремы

6.1 Теорема 1. Теорема сложения вероятностей.

$P(A_1+A_2+A_3+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...+P(A_n)-P(A_1\cdot A_2)-P(A_1\cdot A_3)-\ldots-P(A_1\cdot A_n)-P(A_2\cdot A_3)-...-P(A_{n-1}\cdot A_n)+P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)+P(A_1\cdot A_2\cdot A_4)+...+P(A_{n-2}\cdot A_{n-1}\cdot A_n)+...++(-1)^{n-1}$
$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)$.

Следствие 1.

Если события A_1, A_2, ... ,A_n**несовместны,** то

$P(A_1+A_2+A_3+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...+P(A_n)$.

Следствие 2.

Вероятность суммы двух любых событий равна сумме вероятностей этихсобытий без вероятности их произведения, то есть$P(A+B)=P(A)+P(B)–P(A\cdot B)$.

Замечание.

$P(A) + P(\overline{A}) =1$, откуда$P(\overline{A}) = 1-P(A)$.

6.2 Теорема 2. Теорема умножения вероятностей.

Условной вероятностью $P(A/B)$ события A относительнособытия B назовем вероятность события A при условии, что событие B ужепроизошло.

Теорема умножения.

$P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cdot A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n/A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot A_{n-1})$.

Правило (теорема) умножения для двух событий. Вероятностьпроизведения двух любых событий равна произведению вероятности одного изних на условную вероятность другого относительно первого, то есть

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B).$$

Событие А называется **независимым** от события В, если условнаявероятность события А относительно события Вравна безусловной вероятностисобытия А, то есть P(A/B)=P(A). Нетрудно доказать, что если А не зависит от В,то и В не зависит от А.

Следствие. Если события А и В **независимы,** то $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

Пример 6. Студент знает ответы на 20 из 25 вопросов. Какова вероятностьтого, что он ответит на два выбранных наудачу вопроса?

Решение.

Рассмотрим события: А- студент знает ответ на первый вопрос,В- студент знает ответ на второй вопрос. Найдем $P(A\cdot B)$.

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B/A) = \frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24} = \frac{19}{30}$$

Определение. Несколько событий называют **независимыми** (илинезависимыми в совокупности), если независимы каждые два из них инезависимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Следовательно, если A_1, A_2, ... ,A_n независимы, то справедливо **правило умножениядля независимых событий**

$$P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

Пример 7. Два студента выполняют независимо друг от друга задание.Вероятность того, что задание будет выполнено первым студентом 0,6; длявторого студента эта вероятность равна 0,8. Найти вероятность того, что

- оба студента выполнят задание;
- только один из них выполнит задание;
- хотя бы один из них выполнит задание.

Решение.

События: А- задание выполнит первый студент, В- задание выполнит второйстудент. По условию Р(А) = 0,6; Р(В)=0,8; следовательно, $P(\overline{A})$ = 1–0,6 = 0,4; $P(\overline{B})$ = 1–0,8 = 0,2.

• $P(A \cdot B)$ = /события А и В - независимые события / = $P(A) \cdot P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}8$ = 0,48.

• $P(A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B)$ = / $A \cdot \overline{B}$ и $\overline{A} \cdot B$ - несовместные события /= $P(A \cdot \overline{B}) + P(\overline{A} \cdot B)$ $= P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}44$.

• Р(А+В)=/ А и В-совместные события /= $P(A)+P(B)-P(A \cdot B)$=0,6+0,8—0,48=0,92.

6.3 Теорема 3. Формула полной вероятности

Пусть в результате опыта может появиться какое-либо из несовместныхсобытий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу. Событие А может появитьсятолько вместе с одним из этих событий. События $H_1, H_2, ..., H_n$называются**гипотезами.**Тогда вероятность события Аравна $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$.

Эта формула носит название формулы полной вероятности.

Пример 8. На стройку поступают блоки с трех баз, причем 50% с первойбазы,30% со второй базы, остальные с третьей базы. Вероятность того, что блок спервой базы бракованный - 0,09; со второй - 0,1; с третьей - 0,08. Найтивероятность того, что взятый наудачу на стройке блок окажется бракованным.

Решение.

Рассмотрим гипотезы:

H_1 -взятый наудачу блок поступил с первой базы,

H_2 -взятый наудачу блок поступил со второй базы,

H_3 -взятый наудачу блок поступил с третьей базы.

Тогда из условия $P(H_1)$=50/100=0,5; $P(H_2)$=30/100=0,3; $P(H_3)$=(100-50-30)/100= 0,2.

Событие А -взятый наудачу на стройке блок окажется бракованным.

По условию $P(A/H_1)=0{,}09$; $P(A/H_2)=0{,}1$; $P(A/H_3)=0{,}08$.

Следовательно, по формуле полной вероятности

$P(A)=0{,}5\cdot 0{,}09+0{,}3\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}08=0{,}091$.

6.4 Теорема 4. Формула Байеса (теорема гипотез)

Пусть в условиях предыдущей теоремы событие A наступило и мы нашливероятность P(A). Тогда вероятности гипотез в связи споявлением события A, т.е. найдем $P(H_i/A)$, равны $P(H_i/A)=\dfrac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}$ где i=1,2,...,n.

Пример 9. В предыдущем примере событие A наступило, т.е. взятыйнаудачу на стройке блок оказался бракованным. Определить вероятность того, чтоэтот блок поступил со второй базы.

Решение.

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}1}{0{,}091}\approx 0{,}33.$$

6.5 Теорема 5. Формула Бернулли

Производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие Aнаступает с постоянной вероятностью p. Вероятность того, что в этих nиспытаниях событие A появится ровно m раз равно $P_n(m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$.

Пример 10. Каждый из пяти независимо работающих элементовотказывает с вероятностью 0,4. Найти вероятность того, что откажут три элементаиз пяти.

Решение.

$P_5(3)=C_5^3 p^3(1-p)^2=10\cdot 0{,}064\cdot 0{,}36\approx 0{,}23$.

7. Случайные величины

Случайной величиной X в данном опыте называется переменная величина,которая в результате испытания примет одно из своих возможных значений, нокакое именно до проведения опыта неизвестно.

Совокупность всех возможных значений случайной величины называетсяспектром.Спектр называется дискретным, если все возможные значения случайнойвеличины образуют конечную или бесконечную последовательность, иназывается непрерывным, если все значения случайной величины заполняютсплошь некоторый промежуток.

Например, X- оценка на экзамене. Случайная величина X имеет дискретный, т.к. ее возможные значения: 2;3;4;5. Или X- время безотказной работыдвигателя. В этом случае случайная величина X имеет непрерывный спектр, т.к.возможные значения X заполняют сплошь некоторый промежуток времени [0;t],где t- момент отказа двигателя.

7.1 Функция распределения случайной величины

Функцией распределения F(x) случайной величины X называетсявероятность того, что случайная величина X в результате испытания приметзначение, меньшее x, т.е.***F(x)=P(X<x).***

Из определения функции распределения следуют следующие **свойства F(x):**

1) область определения F(x) - интервал (- ∞;+∞),

2) $0 \le F(x) \le 1$,

3) $F(-\infty)=0$, так как $P(X<-\infty)=0$,

4) $F(+\infty)=1$, так как $P(X<+\infty)=1$,

5) F(x) - неубывающая функция.

Законом распределения случайной величины X называется любая еевероятностная характеристика, из которой можно получить функциюраспределения F(x).

Вероятность попадания случайной величины впромежуток и в точку

Если известна функция распределения F(x) случайной величины X, то

$$P(\alpha \le X < \beta)=F(\beta)-F(\alpha).$$

7.2 Дискретная случайная величина

Случайная величина X называется **дискретной,** если ее спектр дискретный.

Законом распределения дискретной случайной величины X является **ряд распределения**, т.е. перечисление всех возможных значений X и их соответствующих вероятностей:

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

p_i=P(X=x_i), где i=1;2;...;n;...

Многоугольником распределения назовем ломаную, соединяющую последовательно точки (x_1;p_1),(x_2;p_2),...,(x_n;p_n).

Пример 10. Среди шести элементов два изношенных. Составить ряд распределения случайной величины X- числа изношенных элементов среди трех наудачу отобранных. Найти функцию распределения F(x) и построить ее график.

Решение.

Случайная величина X может принимать значения: 0; 1; 2.

$$P(X=0)=\frac{C_2^0\cdot C_4^3}{C_6^3}=\frac{2!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 3!}{0!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 6!}=0{,}2\,.\ P(X=1)=\frac{C_2^1\cdot C_4^2}{C_6^3}=0{,}6\,.\ P(X=2)=\frac{C_2^2\cdot C_4^1}{C_6^3}=0{,}2.$$

X	0	1	2
P	0,2	0,6	0,2

Условие нормировки: 0,2+0,6+0,2=1.

Найдем F(x).

Если хиз (-∞;0], то F(x)=P(X<x)=0;

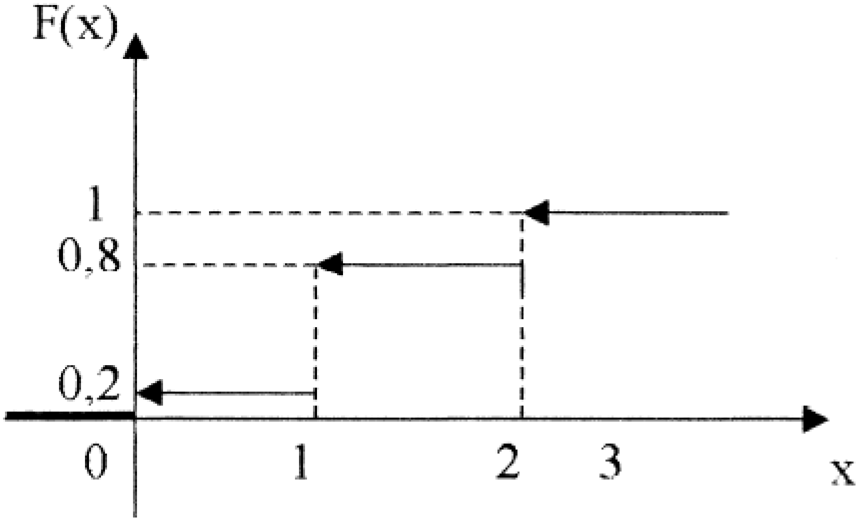
если x из (0;1], то F(x)=P(X<x)=P(X=0)=0,2;

если x из (1;2], то F(x)=P(X<x)=P(X=0)+P(X=1)=0,2+0,6=0,8;

если хиз (2;+ ∞), F(x)=P(X<x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0,2+0,6+0,2=1.

Следовательно,

$$F(x)=\begin{cases}0,\ \text{если}\ x\in(-\infty;0],\\ 0{,}2,\ \text{если}\ x\in(0;1],\\ 0{,}8,\ \text{если}\ x\in(1;2],\\ 1,\ \text{если}\ x\in(2;+\infty).\end{cases}$$



7.3 Непрерывная случайная величина

Случайная величина X называется **непрерывной,** если ее функцияраспределения F(x) непрерывна и имеет непрерывную производную везде, кроме,быть может, конечного числа точек. Из определения следует, что непрерывнаяслучайная величина имеет **непрерывный спектр** (если случайная величина имеетнепрерывный спектр, то из этого не следует, что она непрерывна). Если функцияраспределения F(x) на некоторых участках непрерывна, а в отдельных точкахимеет разрывы, то случайная величина называется смешанной.

Плотностью распределения (или плотностью вероятности) непрерывнойслучайной величины X называется функция f(x) равнаяF'(x).

Отсюда следует, что

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx,$$

т.е. f(x) является **законом распределения** непрерывной случайной величины X.

Свойства f(x):

• $f(x)\geq 0$, т.к. F(x)- неубывающая функция,

• $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

• **P(α≤X<β)=P(α≤X≤β)=P(α<X≤β)=P(α<x<β)=**$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$**.**

Пример 11. Плотность вероятности непрерывной случайной величины X

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\in(-\infty;2],\\ ax, \text{ если } x\in(2;4],\\ 0, \text{ если } x\in(4;+\infty).\end{cases}$$

Найти

• значение параметра a ;

• функцию распределения F(x);

• вероятность того, что в четырех независимых испытаниях случайная величина X хотя бы один раз попадет в промежуток (0;3).

Решение.

• Из условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ следует

$$\int_{-\infty}^{2} 0dx + \int_{2}^{4} axdx + \int_{4}^{\infty} 0dx = 0 + a\frac{x^2}{2}\Bigg|_2^4 + 0 = a\left(\frac{16}{2}-\frac{4}{2}\right) = 6a = 1$$, откуда $a=\frac{1}{6}$.Итак

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\in(-\infty;2],\\ \frac{1}{6}x, \text{ если } x\in(2;4],\\ 0, \text{ если } x\in(4;+\infty).\end{cases}$$

• $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$

Если хиз (-∞;2], то F(x)= $\int_{-\infty}^{2} 0dx = 0$ =0;

если x из (2;4], то F(x)= $\int_{-\infty}^{2} 0dx + \int_{2}^{x} \frac{1}{6}xdx + = 0 + \frac{1}{6}\frac{x^2}{2}\Bigg|_2^x = \frac{1}{12}\left(x^2-4\right)$;

если хиз (4;+ ∞), F(x)= $\int_{-\infty}^{2} 0dx + \int_{2}^{4} \frac{1}{6}xdx + \int_{4}^{\infty} 0dx = 0 + \frac{1}{6}\frac{x^2}{2}\Bigg|_2^4 + 0 = \frac{1}{6}\left(\frac{16}{2}-\frac{4}{2}\right) = 1$.

Следовательно,

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\in(-\infty;2],\\ \frac{1}{12}(x^2-4), \text{ если } x\in(2;4],\\ 1, \text{ если } x\in(4;+\infty).\end{cases}$$

•P(0<X<3)=F(3)-F(0)=$\frac{1}{12}(9-4)=\frac{5}{12}$.

7.4 Основные числовые характеристики случайной величины

Закон распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения. Однако при решении многих практических задачдостаточно знать о случайной величине лишь характерные черты законараспределения, которые в сжатой форме выражают существенные особенностираспределения.

О каждой случайной величине необходимо, прежде всего, знать ее **среднеезначение**, около которого группируются возможные значения случайнойвеличины, а также **число**, характеризующее **степень разбросанности** возможныхзначений относительно среднего значения случайной величины. Для болееполного описания случайной величины используют и другие числовыехарактеристики.

Математическое ожидание случайной величины

Математическим ожиданием или средним значением **дискретнойслучайной** величины X называется число

$$\text{M[X]}=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i .$$

Если же **дискретная случайная** величина X имеет n возможных значений, то

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Таким образом, математическим ожиданием случайной величины называетсясумма произведений всех возможных значений случайной величины насоответствующие вероятности этих значений.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины Хназывается число

$$M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Если же возможные значения **непрерывной случайной** величины Хпринадлежат лишь отрезку [a **;**b], то

$$M[X] = \int_a^b xf(x)dx.$$

Пример 12. Непрерывная случайная величина Х задана плотностьювероятности.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x, \text{ если } x \in [2;4], \\ 0, \text{ если } x \notin [2;4]. \end{cases}$$

Найти M[X].

Решение.

$$\text{M[X]}=\int_2^4 x\frac{1}{6}xdx = \frac{1}{6}\int_2^4 x^2dx = \frac{1}{6}\frac{x^3}{3}|_2^4 = \frac{1}{18}(64-8) = \frac{56}{18} \approx 3{,}11.$$

Простейшие свойства математического ожидания.

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самойпостоянной, то естьM[C]=C.

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знакматематического ожидания, то естьM[CX]=CM[X].

Дисперсия и среднее квадратическое отклонениеслучайной величины

Дисперсией случайной величины Х называется число, характеризующеестепень разброса возможных значений случайной величины относительно еематематического ожидания, обозначаемое D[X] и равноеD[X]=M[(X-M[X])^2].

Следовательно, для **дискретной случайной** величины D[X] находят поформуле

$$\mathbf{D[X]}=\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 p_i$$

m_x – математическое ожидание M[X].

Для **непрерывной случайной** величины

$$\mathbf{D[X]}=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называетсячисло$\sigma_x=\sqrt{D_x}$, где D_x=D[X].

Среднее квадратическое отклонение σ_x также характеризует степеньотклонения возможных значений случайной величины относительно ее m_x, ноимеет размерность случайной величины.

Простейшие свойства дисперсии.

Свойство 1. Дисперсия **постоянной** величины равна нулю.D[C]=0

Свойство 2. **Постоянный множитель** можно выносить за знак дисперсии,возводя его при этом в квадрат, т.е.$D[CX]=C^2D[X]$.

Свойство 3.$D_x=M[X^2]-m_x^2$.

Пример 13. Найти дисперсию случайной величины X, имеющейследующий закон распределения

X	-3	-1	2
P	0,2	0,5	0,3

Решение.

Воспользуемся формулой $D_x=M[X^2]-m_x^2$.

Найдем M[X]=(-3)·0,2+(-1)·0,5+2·0,3=-0,5;

$M[X^2]=(-3)^2\cdot 0,2+(-1)^2\cdot 0,5+2^2\cdot 0,3=3,5$; следовательно,

$D_x=3,5-(-0,5)^2=3,5-0,25=3,25$. Можно вычислить $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{3,25} \approx 1,80$.

Таблица соотношения начальной буквы фамилии студента и варианта контрольных заданий

Начальная буква фамилии	Вариант задания
А, Е, Л	Первый
Р, Х, Э	Второй
Б, Ж, М	Третий
С, Ц, Ю	Четвертый
В, З, Н	Пятый
Т, Ч	Шестой
Г, И, О	Седьмой
П, У, Ш	Восьмой
Д, Щ,	Девятый
Ф, К, Я	Десятый

Задания для домашней контрольной работы

ЗАДАНИЕ №1. Вероятность события. Теоремы сложения и умножения событий.

1.В лотерее 10 билетов, из которых 4 выигрышных. Какова вероятность выиграть хотя бы один раз, купив 3 билета?

2. У шести животных имеется заболевание, причем вероятность выздоровления равна 0,98. Какова вероятность того, что:

а) выздоровят все шестеро животных,
б) выздоровят четверо?

3. В магазине работают 2 мужчин и 7 женщин. Трое из них должны пойти в отпуск летом. Кто именно – определяется жребием. Найти вероятность того, что летом в отпуск пойдет хотя бы один мужчина.

4. Среди 10 документов, поступивших в офис, два оформлены с ошибками. Для проверки наудачу взяли 4 документа. Какова вероятность того, что среди ни окажется:
а) хотя бы один неверно оформленный документ,
б) только один неверно оформленный документ.

5. Рабочий обслуживает 3 станка, каждый из которых работает независимо друг от друга. Вероятность того, что станки потребуют ремонта равна соответственно: 0,4; 0,3; 0,2. Найти вероятность того, что придется ремонтировать все станки.

6.Среди 15 счетов 3 счета оформлены неверно. Ревизор наудачу берет 5 счетов. Найти вероятность того, что среди взятых счетов:
а) два оформлены неверно,
б) все оформлены верно.

7.В пачке 10 тетрадей, среди них 4 тетради в клетку, а остальные в линейку. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых трех тетрадей хотя бы одна будет в клетку.

8.Из 20 методичек по математике 3 по теории вероятностей. Студент наудачу взял две методички.
Найти вероятность того, что среди взятых:
а) нет методичек по теории вероятностей,
б) есть одна методичка по теории вероятностей.

9.Из трех бухгалтеров, восьми менеджеров и шести научных работников необходимо сформировать комитет из 10 человек. Найти вероятность того, что в комитете окажутся: один бухгалтер, пять менеджеров и четыре научных работника.

10.В урне лежат 5 красных, 7 синих и 11 белых шаров. Какова вероятность, что вынутый шар окажется не белым?

ЗАДАНИЕ № 2. Теорема полной вероятности события.

1.Первый рабочий изготовил 40 деталей. Из которых 40 деталей, из которых 4 бракованных. Второй абочий изготовил 30 таких же деталей, из которых 2 бракованных. Все изготовленные детали положены в одну тару и доставлены в ОТК. Найти вероятность того, что деталь, взятая на удачу контролером ТК, соответствует ГОСТу.

2. Сборщик получил 3 ящика деталей: в первом ящике 40 деталей, из них 20 окрашенных; во втором– 50, из них 10 окрашенных; в третьем – 30 деталей, из них 15 окрашенных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика окажется окрашенной.

3. На трех пресс-формах изготавливают детали, причем на первой вырабатывается 50% всех деталей; на второй 30% и на третьей – 20%. При этом вероятность появления брака с первой пресс-формы составляет 0,05; со второй – 0,08; с третьей – 0,1. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь, из числа изготовленных, соответствует стандарту.

4.Радиолампа поступает с одного из двух заводов с вероятностью 0,4 и 0,6 соответственно. Вероятность бесперебойной работы лампы составляет: для лампы первого завода – 0,1; второго завода – 0,2. Найти вероятность того, что лампа работает бесперебойно.

5. Фирма имеет три источника поставки комплектующих – фирмы А, В, С. На долю фирмы А приходится 50% общего объема поставок, В – 30% и С – 20%. Известно, что 10% поставляемых фирмой А деталей бракованные, фирмой В – 5% и фирмой С – 6%. Какова вероятность, что взятая наугад деталь будет бракованной?

6. Две литейные машины изготавливают по 250 однотипных отливок в смену, которые хранятся в одном месте. Для первой машины брак составляет 3%, а для второй – 2%. Найти вероятность того, что на удачу взятая отливка будет годной.

7. На сборку поступают детали из трёх заготовительных цехов. Известно, что первый цех даёт 3% брака, второй -2%, третий-1%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если каждый цех поставляет, соответственно, 500, 200 и 300 деталей.

8. На складе хранятся 800 изделий завода №1 и 1200 изделий завода №2. Среди изделий завода №1 в среднем 95% высшего качества, а среди изделий завода №2 – 80%. Чему равна вероятность того, что первое принесённое со склада окажется низкого качества.

9. Трое рабочих за смену изготовили 60 деталей. Производительность рабочих относится как 1:2:3. Первый рабочий изготавливает в среднем 95% годных деталей, второй 85% и третий - 90%. Найти вероятность того, что наудачу взятая из числа изготовленных за смену деталь низкого качества.

10. Среди 100 деталей, изготовленных цехом №1, 85 деталей проходит закалку. Из числа 120 таких же деталей, изготовленных цехом №2, закалку проходят 95 деталей. Все эти детали поступают на сборку. Чему равна вероятность того, что наудачу взятая сборщиком деталь, прошла предварительную закалку?

ЗАДАНИЕ №3. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Формула Пуассона. Формула Муавра-Лапласа.

1. Вероятность малому предприятию быть банкротом равна 0,2. Найти вероятность того, что из восьми малых предприятий сохранятся:

а) два,

б) более двух.

2. На факультете насчитывается 1825 студентов. Найти вероятность того, что 1 сентября является днем рождения четырех студентов.

3. В среднем 20% пакетов акций продаются на аукционе по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций по первоначальной цене будет продано:

а) менее 2 пакетов,

б) хотя бы один пакет.

4. В поселке из каждых 100 семей 80 имеют холодильники. Найти вероятность того, что из 400 300 имеют холодильники.

5. Завод отправил на базу 10000 стандартных изделий. Среднее число поврежденных при транспортировке изделий составляет 0,02%. Найти вероятность того, что из 10000 изделийбудет повреждено:

а) 3,

б) менее трех.

6. Предполагается,что 10%новых малых предприятий прекращают деятельность в течение года.

Найти вероятность того, что из 6 предприятий 2прекратят деятельность.

7. В среднем по 15% договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из 10 договоров с наступлением страхового случая страховая сумма будет выплачена по:

а) трем договорам,
б) менее двум договорам.

8.Контрольную работу по математике успешно выполняют 70 % студентов. Найти вероятность того, что из 400 студентов работу выполнят 180.

9.Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что в учебнике есть опечатки равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит:

а) 5 бракованных книг,
б) менее двух бракованных книг.

10. При проверке установлено, что пятая часть банков имеет уставной фонд свыше 100 млн. руб.

Найти вероятность того, что среди 1800 банков такой уставной фонд имеют:
а) не менее 300,
б)от 300 до 400.

ЗАДАНИЕ №4. Закон распределения вероятностей случайных дискретных величин. Числовые характеристики дискретных случайных величин. Функция распределения вероятностей случайной величины.

1. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Записать закон распределение X – числа попаданий в цель при 4 выстрелах. Составить функцию распределения случайной величиныF(x). Вычислить M(X), Д(X), $\sigma_{x.}$

2. По заданному закону распределения дискретной случайной величины X:

x_1	1	4	5	7	8
p_1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2

Составить функцию распределения F(x) и изобразить ее график. Вычислить M(X), Д(X), $\sigma_{x.}$

3. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Записать закон распределение X – количества библиотек,которые посетит студент, если в городе 4 библиотеки. Составить функцию распределения случайной величиныF(x). Вычислить M(X), Д(X), $\sigma_{x.}$

4. По заданному закону распределения дискретной случайной величины X:

x_1	1	4	5	7	8
p_1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2

Составить функцию распределения F(x) и изобразить ее график. Вычислить M(X), Д(X), $\sigma_{x.}$

5. Студенту задается 3 вопроса. Вероятность ответа на каждый из них составляет 0,9. Записать закон распределение X – числа ответов студента. Составить функцию распределения случайной величиныF(x). Вычислить M(X), Д(X), $\sigma_{x.}$

6. По заданному закону распределения дискретной случайной величины X:

x_1	4	5	6	7	8
p_1	0,1	0,3	0,1	0,2	0,3

Составить функцию распределения F(x) и изобразить ее график. Вычислить M(X), Д(X), $\sigma_{x.}$

7. Клиенты банка не возвращают кредиты с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа X возвращенных кредитов из 4 выданных. Составить функцию распределения случайной величины F(x). Вычислить M(X), Д(X), $\sigma_{x.}$

8. По заданному закону распределения дискретной случайной величины X:

x_1	0	1	2	3	4
p_1	0,2	0,2	0,1	0,2	0,3

Составить функцию распределения F(x) и изобразить ее график. Вычислить M(X), Д(X), $\sigma_{x.}$

9. Из урны, содержащей 3 белых и 4 черных шара, вынимают на удачу 3 шара. Найти закон распределения X – числа вынутых черных шаров. Составить функцию распределения случайной величиныF(x). Вычислить M(X), Д(X), $\sigma_{x.}$

10. По заданному закону распределения дискретной случайной величины X:

x_1	4	5	6	7
p_1	$^{7}/_{36}$	$^{89}/_{180}$	$^{5}/_{18}$	$^{1}/_{30}$

Составить функцию распределения F(x) и изобразить ее график. Вычислить М(Х), Д(Х), σ_x.

ЗАДАНИЕ №5 Статистическое распределение. Геометрическое изображение. Выборочные характеристики статистического распределения.

По данному статистическому распределению выборки вычислить:

а) выборочную среднюю,

б) выборочную дисперсию,

с) выборочное среднее квадратическое отклонение.

Построить полигон частот или гистограмму.

1.

x_i	110	115	120	125	130	135	140
n_i	3	7	11	40	19	12	8

2

x_i	120	130	140	150	160	170	180
n_i	6	9	29	26	14	11	5

3.

x_i	10,3	11,0	11,7	12,4	13,1	13,8	14,5
n_i	7	10	60	13	5	3	2

4

x_i	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5
n_i	5	13	40	26	7	5	4

.

5.

x_i	42	50	58	66	74	82	90
n_i	4	17	55	12	7	3	2

6.

x_i	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250	250-260
n_i	2	4	7	8	6	3

7.

x_i	190-200	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250
n_i	5	2	4	8	6	5

8.

x_i	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18
n_i	6	12	17	10	4	1

9.

x_i	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18
n_i	1	1	5	9	14	20

10.

x_i	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
n_i	3	8	16	20	20	3

ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНОЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

Теория вероятностей и математическая статистика (для бакалавров). Учебное пособие [Электронный ресурс]: учебное пособие / И.А. Кацко. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2019. — 389 с. — ISBN 978-5-406-06704-8. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/930219 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Теория вероятностей и математическая статистика в вопросах и задачах [Электронный ресурс]: учебное пособие / И.И. Цыганок. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2019. — 254 с. — Для бакалавров. — ISBN 978-5-406-06444-3. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/931355 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Теория вероятностей и математическая статистика в вопросах и задачах [Электронный ресурс]: учебник / Е.С. Вентцель. – Электрон. текстовые данные. — Москва : Юстиция, 2018. — 658 с. — Для бакалавров. — ISBN 978-5-4365-1927-2. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/924283 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Дополнительная литература:

Теория вероятностей и математическая статистика для экономистов [Электронный ресурс]: учебник / О.В. Татарников, Е.В. Швед. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2018. — 206 с. — Для бакалавров. — ISBN 978-5-406-05917-3. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/924192 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Теория вероятностей и математическая статистика для экономистов [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.М. Карлов. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2015. — 260 с. — ISBN 978-5-406-04445-2. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/916569 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебник / В.С. Пугачев. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2017. — 496 с. — ISBN 978-5-4365-1551-9. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/922288 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебное пособие / П.С. Бондаренко, Г.В. Горелова, И.А. Кацко под ред. и др. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2017. — 389 с. — Для бакалавров. — ISBN 978-5-406-05578-6. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/920636 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс]: учебник / В.А. Колемаев, В.Н. Калинина. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2017. — 376 с. — ISBN 978-5-406-05588-5. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/920491 — ЭБС BOOK.ru, по паролю