МУРМАНСКАЯ АКАДЕМИЯ ЭКОНОМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ

УТВЕРЖДАЮ
Начальник учебно-
методического управления
Ю.В. Бирюков
«21» февраля 2018 г

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по выполнению домашней контрольной работы №1 по дисциплине
МАТЕМАТИКА

Специальность
38.05.01 Экономическая безопасность

Специализация №1
Экономико-правовое обеспечение экономической безопасности

Мурманск
2018

Математика: Методические рекомендации по выполнению домашней контрольной работы №1 / Мурманск: ЧОУ ВО «МАЭУ», 2018. - 34 с.

Математика: Методические рекомендации по выполнению домашней контрольной работы №1: Предназначены для обучающихся по программе специалитета по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность»: для студентов заочной формы обучения

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель курса математики состоит в освоение необходимого математического аппарата. Это необходимо для анализа моделирования и решения прикладных задач, с использованием ЭВМ.

Задачи изучения математики как фундаментальной дисциплины состоят в развитии логического и алгоритмического мышления, в выработке умения моделировать реальные процессы.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций, представленных в таблице.

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине «Математика», соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Таблица 1− Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине

Код компетенции	Наименование компетенции	Вид деятельности и проф. задачи	Планируемые результаты	Уровень освоения компетенции
ОПК-1	способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач		*знать:* – роль и место информации в развитии современного информационного общества; *уметь:* –выделять наиболее существенные факты в профессиональной деятельности; *владеть:* – способностью выстраивать перспективные стратегии личностного и профессионального развития.	Пороговый
			знать: – роль и место информации в развитии современного информационного общества; – основные положения изучаемого курса. *уметь:* – выделять наиболее существенные факты в	Базовый

			профессиональной деятельности; *владеть:* – способностью выстраивать перспективные стратегии личностного и профессионального развития.	
			знать: – роль и место информации в развитии современного информационного общества; – основные положения изучаемого курса. *уметь:* – выделять наиболее существенные факты в профессиональной деятельности; – адекватно оценивать итоги своих образовательных и научных результатов. *владеть:* способностью выстраивать перспективные стратегии личностного и профессионального развития.	Продвинутый

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

Раздел 1 Элементы линейной и векторной алгебры

Тема 1.1 Матрицы и определители

Алгебраическая операция и ее свойства. Определение и примеры группы, кольца, поля. Определение матрицы. Виды матриц. Транспонирование матриц. Алгебраические операции над матрицами. Свойства алгебраических операций над матрицами. Определители второго, третьего порядков и матрицы n-го порядка. Свойства определителей. Алгебраические дополнения и их свойства. Присоединенная и обратная матрицы. Критерий обратимости. Метод Жордана-

Гаусса нахождения обратной матрицы. Ранг матрицы как наивысший порядок ее миноров, отличных от нуля. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Линейная комбинация, линейная зависимость и независимость строк (столбцов) матрицы.

Матрица – это прямоугольная таблица, составленная из $m \cdot n$ чисел, расположенных в m строках и n столбцах. Обращение к элементу матрицы происходит указанием номера строки и номера столбца. Например, элемент a_{27} (читается: а два семь) стоит во второй строке и седьмом столбце. Следует изучить основные алгебраические операции, выполняемые над матрицами: умножение матрицы на число, сложение, умножение матриц, транспонирование, и их свойства.

Относительные трудности возникают при усвоении операции умножения матриц. Необходимо твердо усвоить формальное правило умножения (1, с. 12–13) и связанное с ним условие существования произведения AB матриц A и B: число столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B. Одна из особенностей операции умножения состоит в том, что произведение матриц в общем случае не коммутативно, т.е. $AB \neq BA$. Если матрицы A и B не квадратные, то это свойство очевидно, так как либо одно из произведений AB или BA не существует, либо AB и BA – матрицы разных размеров. Даже если A и B – квадратные матрицы, в общем случае $AB \neq BA,$ в чем нетрудно убедиться на любом частном примере. Другая особенность произведения матриц состоит в том, что произведение двух ненулевых матриц может оказаться нулевой матрицей.

Например, можно легко показать, что произведение матриц есть нулевая матрица (сравните: во множестве действительных чисел произведение равно нулю тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю).

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \\ -18 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

При изучении понятия определителей необходимо уяснить, что определитель есть **число,** сопоставляемое квадратной матрице по определенным правилам. Однако, эти правила не дают эффективного способа вычисления определителей. Легко запоминаются лишь формулы для вычисления определителей второго и третьего порядков (это необходимо сделать!) (1, пример 1.9, с.25, 26).. Основные свойства определителей помогут решить задачу вычисления определителей более высокого порядка. Попробуйте с этим разобраться.

Важным определением в теории матриц является определение обратной матрицы. Оказывается, обратная матрица существует не всегда (!), а лишь в тех случаях, когда ее определитель отличен от нуля. Для того, чтобы вычислить обратную матрицу нужно знать определение присоединенной матрицы, уметь их вычислять, Проверить правильность вычисления обратной матрицы довольно просто. Для этого вычислите произведение AA^{-1} или $A^{-1} A$. Если в результате Вы получите единичную матрицу, то обратная матрица A^{-1} найдена правильно.

Пример: Найти матрицу $C = B^T \cdot A^T \cdot A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Решение:

Алгоритм решения:

1. Находим матрицы B^T, A^T, транспонированные к матрицам A и B.

$A^T=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, $B^T=\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Находим произведение матриц:

$B^T \cdot A^T=\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Находим произведение матриц:

$A \cdot B=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Находим произведение

$C=B^T \cdot A^T \cdot A \cdot B=\begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: $C=\begin{pmatrix} 9 & -1 \end{pmatrix}$.

Тема 1.2 Система линейных уравнений

Система n линейных уравнений с n переменными (общий вид). Матричная форма записи системы. Совместные и несовместные, определенные и неопределенные системы. Теорема Крамера о разрешимости системы n линейных уравнений с n переменными (без доказательства). Решение системы по формулам Крамера, с помощью обратной, методом Гаусса.

При изучении материала темы следует освоить матричную форму записи заданной системы n линейных уравнений с n переменными и уметь переходить к этой форме от общего вида системы и наоборот. Необходимо знать и уметь объяснить, какие системы уравнений называются совместными (определенными и неопределенными) и несовместными. Решить систему линейных уравнений помогает метод Гаусса, теорема Крамера и обратная матрица. Отметим, что формулы Крамера и обратная матрица, работают не всегда, а лишь в том случае, когда определитель матрицы коэффициентов при неизвестных не равен нулю. (см. примеры 2.1–2.3, 2.6, 2.7).

Наиболее важен для практики метод Гаусса, имеющий по сравнению с другими способами решения ряд достоинств: он менее трудоемок, позволяет однозначно установить, является ли данная система определенной, неопределенной или несовместной, а в случае совместности системы – определить число ее независимых уравнений и исключить «лишние».

Отметим, что системы линейных уравнений с большим числом неизвестных (более 3), решаются в основном методом Гаусса.

В методе Гаусса нужно усвоить правило исключения неизвестных x_1, x_2, …, x_n. Цель – в первом столбце во всех строках кроме первой получить нули путем прибавления первой строки, умноженной на подходящие коэффициенты, ко второй и последующим строкам.

Затем умножается вторая строка на соответствующие коэффициенты. Цель – обеспечить нули во втором столбце во всех строках кроме второй ($a_{22} \neq 0$) путем прибавления к третьей и последующим строкам второй строки, умноженной на необходимые коэффициенты и т.д.

Для первой строки это коэффициенты ($-a_{21}/a_{11};-a_{31}/a_{11};\ldots;-a_{m1}/a_{11}$); для второй строки это коэффициенты ($-a_{32}/a_{22};-a_{42}/a_{22};\ldots;-a_{m2}/a_{22}$).

Множество всех переменных делятся на два класса – главные или базисные переменными, для которых определитель матрицы из коэффициентов при них отличен от нуля (переменные x_1, $x_2,\ldots$, x_r), и свободные, остальные (n–r) переменных. Основная задача – выразить главные переменные через свободные.

При прямом ходе метода Гаусса решения системы линейных уравнений определяется главная переменная x_r. Затем при обратном ходе определяются остальные главные переменные x_{r-1}, x_{r-2} и так до x_1.

Необходимо разобраться (теорема Кронекера-Капелли) в том, что система имеет единственное решение в том случае, когда ранг матрицы «r» равен числу переменных «n», т.е. r=n; система имеет бесконечное множество решений, если n >r.

Тема 1.3 Векторное пространство

Определение и примеры векторного пространства. Определение и примеры подпространства. Линейная комбинация, линейная оболочка, линейная зависимость и независимость векторов. Базис и размерность векторного пространства. Разложение вектора по базису. Матрица перехода и ее свойства. Фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений.

Необходимо разобраться с понятием n-мерного вектора и векторного пространства, изучить свойства векторного пространства.

Множества всех плоских и пространственных векторов, для которых определены операции сложения и умножения, а также умножения вектора на число, являются простейшими примерами векторных пространств. В данной теме обобщается понятие вектора и дается определение векторного пространства.

Необходимо уяснить понятие линейной комбинации, линейной зависимости и линейной независимости векторов, а именно: линейная комбинация векторов $a_1,a_2,\ldots,a_n$ векторного пространства R равна сумме произведений этих векторов на произвольные действительные числа ($a_m=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_{m-1}a_{m-1}$). Векторы $a_1,a_2,\ldots,a_n$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ не равные нулю одновременно, что $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_m a_m=0$. Векторы $a_1,a_2,\ldots,a_n$ называются линейно независимыми, если $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_m a_m=0$ только при одновременном равенстве нулю всех чисел $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$.

В случае линейной зависимости векторов, по крайней мере, один из них выражается через остальные.

Необходимо уяснить, что любой вектор пространства может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса.

Особую роль в приложениях математики играют векторы, обладающие следующим свойством: при умножении квадратных матриц на них образуются новые векторы, коллинеарные исходным. Такие векторы получили название собственных векторов матрицы, а соответствующие им числа – собственных значений матрицы.

Тема 1.4 Линейные отображения

Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Евклидово пространство. Билинейные функции и квадратичные формы в евклидовом пространстве. Приведение квадратичной формы к каноническому виду в евклидовом пространстве.

При изучении материала следует разобрать понятия евклидова пространства, линейного оператора. Во многих вопросах, как чисто математических, так и прикладного характера, встречаются квадратичные формы от нескольких переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Так называется любой однородный многочлен второй степени от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Слово «однородный» означает, что все члены многочлена имеют одну и ту же степень. Возникает задача о таком выборе преобразования координат, при котором квадратичная форма в новых координатах имеет особенно простой вид. Такой вид квадратичной формы называется каноническим. Его особенность состоит в том, что отсутствуют члены с произведением различных координат. Более простой метод приведения к каноническому виду – метод Лагранжа. Полученные различными способами канонические формы обладают рядом общих свойств (закон инерции квадратичных форм, критерий Сильвестра).

Раздел 2 Элементы аналитической геометрии

Определение системы координат на плоскости: декартова и полярная системы координат. Векторы на плоскости и в пространстве. Проекция вектора на ось. Линейные операции над векторами (произведение на число, сложение) и их свойства. Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов, их выражение через координаты, геометрический смысл, свойства. Уравнение прямой с угловым коэффициентом, общее уравнение прямой, уравнение прямой, проходящей через две точки. Угол между прямыми, знать условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, формулу нахождения расстояния от точки до прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом, общее уравнение прямой, уравнение прямой, проходящей через две точки. Угол между прямыми, знать условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, формулу нахождения расстояния от точки до прямой. Общее уравнение прямой в пространстве, уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении, через две точки. Общее и параметрическое уравнения плоскости в пространстве, геометрический смысл коэффициентов в общем уравнении плоскости. Взаимное расположение двух прямых, двух плоскостей, прямой и плоскости. Поверхности второго порядка. Определение эллипсоида, одно и двуполостного гиперболоидов, эллиптического и гиперболического параболоидов, конуса, цилиндров. Классификация поверхностей второго порядка.

Необходимо рассмотреть и усвоить понятие вектора, обозначения векторов, определение длины векторов, определение коллинеарных векторов, противоположных векторов. Изучить операции сложения и вычитания векторов на плоскости и в пространстве. Правило параллелограмма, многоугольника, параллелепипеда.

Надо уяснить, что скалярное произведение векторов это произведение модулей их длин на косинус угла между ними, а скалярное произведение в координатах равно сумме произведений соответствующих координат.

РАЗДЕЛ 3 ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Тема 3.1 Функции

Понятие о множествах. Действительные числа и числовые множества. Постоянные и переменные величины. Функции и способы их задания. Область определения функции. Четные, нечетные, монотонные и ограниченные функции. Сложная функция. Понятие элементарной функции. Основные элементарные функции и их графики. Неявные функции.

Прежде всего, полезно ознакомиться с некоторыми логическими символами и кванторами, чтобы использовать их в дальнейшем для сокращения записей

Изучение темы следует начать с основных понятий теории множеств , Далее нужно четко усвоить важнейшее понятие математического анализа – функции, уметь находить область ее определения, знать три способа задания функции: аналитический, графический, табличный.

Студенту нужно знать простейшие преобразования для построения функций, как-то: сдвиг графика $y=f(x+a)+b$ вправо при $a < 0$ и влево при $a > 0$, а также на $|b|$ параллельно оси Ox вниз при $b< 0$ и вверх на $|b|$ при $b >0$; сжатие $0<m<1$ (растяжение $m >1$) графика функции $y=m\cdot f(x)$ вдоль оси Ox.

В курсе рассматриваются в основном элементарные функции. Студент должен уяснить определение элементарной функции четко знать свойства и строить графики следующих основных элементарных функций: $y=C$ (постоянная), $y=x^n$ (степенная), $y=a^x$ (показательная), $y=log_a x$ (логарифмическая). Необходимо усвоить понятие сложной функции (функции от функции).

Построение графика четной (нечетной) функции можно значительно упростить, если учесть, что графики четных функций симметричны относительно оси *Oy,* а нечетных – относительно начала координат. Одним из характерных свойств функции является монотонность (т.е. возрастание или убывание на каком-либо промежутке).

Студенту необходимо уяснить, что функции находит широкое применение в экономической теории. Знать конкретные виды функций и их сущность (функция полезности, функция издержек и т.д.).

Уравнение линии на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении, через две данные точки. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Точка пересечения двух прямых.

Студенту необходимо прочно усвоить материал, который будет использован при изучении экономико-математических методов и прикладных моделей (линейное программирование). Большое значение здесь имеет определение уравнения линии на плоскости как уравнения с двумя переменными *x* и *y*, которому удовлетворяют координаты каждой точки этой линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на ней. Из этого определения следуют два важных для практики положения, которые нужно знать:

1. Если задано уравнение линии, то можно установить, принадлежит ли ей какая-либо точка плоскости. Для этого достаточно подставить координаты точки в уравнение линии вместо переменных *x* и *y*. Если окажется, что они удовлетворяют уравнению, то точка принадлежит линии, в противном случае – не принадлежит.

2. Координаты точки пересечения двух линий, заданных своими уравнениями, удовлетворяют обоим уравнениям. Поэтому для нахождения координат точки пересечения двух линий нужно решить систему, составленную из их уравнений. Этот вопрос должен быть усвоен твердо.

Студент должен знать простейшие виды уравнений прямой и уметь пользоваться ими при решении задач. Обратите особое внимание на нахождение уравнений прямых, параллельной и перпендикулярной данной прямой (пример 4.5).

Тема 3.2 Пределы и непрерывность

Предел числовой последовательности. Предел функции в бесконечности и точке. Бесконечно малые величины и их свойства. Бесконечно большие величины. Основные теоремы о пределах: теорема единственности, предел суммы, произведения, частного. Признаки существования предела. Второй замечательный предел. Число е. Понятие о натуральных логарифмах. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Основные теоремы о непрерывных функциях. Вычисление пределов.

Необходимо ознакомиться с определением предела числовой последовательности и его геометрической интерпретацией; понять определение предела функции в точке и в бесконечности и познакомиться с их геометрической интерпретацией.

Суть предела числовой последовательности в том, что для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon>0$ можно найти номер числовой последовательности ($N=N(\varepsilon)$), что для всех членов последовательности с номерами $n>N$ верно неравенство $|a_n-A|<\varepsilon$.

Весьма важным являются понятия бесконечно малых и бесконечно больших величин суть которых сводится к тому, что при своем изменении бесконечно малая (по абсолютной величине) будет меньше любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon<0$, а бесконечно большая будет больше любого сколько угодно большого числа $M>0$.

Нужно знать взаимосвязь бесконечно больших и бесконечно малых величин, с помощью которых доказываются теоремы о пределах. Следует обратить внимание на признаки существования пределов, особенно на теорему, часто позволяющую установить наличие предела значительно проще, чем при использовании его определения.

Необходимо (без вывода) знать второй замечательный предел в двух формах записи: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)$= e и $\lim_{y\to\infty}(1+y)^{1/y}$=e.

Понятие непрерывности функции (в точке, на промежутке) является более простым, чем предел, так как оно выражается непрерывностью графика при прохождении данной точки, данного промежутка (без отрыва карандаша от листа бумаги). Наряду с интуитивным представлением надо знать определение непрерывности функции в точке и на промежутке, свойства непрерывных функций а также то, что всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке области определения и может иметь разрыв лишь на границах области определения.

Необходимо ознакомиться с теоретическими вопросами и дать на них ответы.

РАЗДЕЛ 4 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема 4.1 Производная

Задачи, приводящие к понятию производной. Производная, ее геометрический, механический и экономический смысл. Уравнение касательной к плоской кривой; Дифференцируемость функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции (необходимый признак дифференцируемости). Основные правила и основные формулы дифференцирования. Производная сложной функции Производные высших порядков.

Необходимо изучить задачи, приводящие к понятию производной: задачи о касательной и задачи о скорости движения, задачи о производительности труда (экономический смысл производной).

После этого нужно усвоить определение производной как предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю. Нужно знать обозначение производной, алгоритм ее вычисления, основываясь на теории пределов.

Студент обязан понимать геометрический и механический смысл производной уметь решать простейшие задачи по вычислению производной на основе алгоритма ее вычисления; знать и уметь применять основные правила дифференцирования, вычислять производную сложной и обратной функций. При этом нужно знать четко правила вычисления элементарных функций, знать наизусть таблицу производных. Это позволит усвоить дифференцирование сложных функций, обратных функций, неявно заданных функций, находить производные от произведения, суммы, разности, а также вычислять производные высших порядков. Нужно знать использование понятия производной в экономике, понятие эластичности функции, свойства эластичности функции.

Изучая материал этой темы, студенты знакомятся с необходимым условием дифференцируемости функции. Необходимо четко уяснить, что из дифференцируемости функции в некоторой точке следует ее непрерывность в этой точке. Обратная теорема несправедлива, так как существуют непрерывные функции, которые в некоторых точках могут не иметь производной.

Для усвоения темы нужно решить задачи контрольной работы, ответить письменно на теоретические вопросы в контрольной работе.

Тема 4.2 Приложения производной

Правило Лопиталя ('без вывода), Теорема Ролля и Лагранжа (с нестрогими геометрическими доказательствами). Признаки возрастания и убывания функции. Экстремум функции. Необходимые и достаточные признаки экстремума (второй достаточный признак – без доказательства). Исследование функции (область определения, четность и нечетность, интервалы монотонности и точки экстремума, поведение функции при $x \to \pm\infty$ и в точках разрыва, горизонтальные и вертикальные асимптоты, точки пересечения графика с осями координат) и построние ее графика. Квадратичная функция $y = ax^2+bx+c$ и ее график. Дробно-линейная функция $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ и ее график.

Нужно уяснить, что правило Лопиталя является эффективным средством вычисления пределов. При этом нужно понимать, что предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций заменяется вычислением отношения их производных. Это правило можно использовать для вычисления целого ряда неопределенностей.

С помощью производных можно эффективно исследовать функции на возрастание и убывание, определять экстремумы функций, наибольшее и наименьшее значение. Для этого необходимо знать теоремы о достаточных условиях возрастания и убывания функции, определения точек минимума и максимума, первое и второе достаточное условие экстремума, определение выпуклости и вогнутости функции (выпуклости вниз). Необходимо знать общую схему исследования функции.

Рекомендуется разобрать задачи, обратив особое внимание на исследование функций и построение их графиков

Раздел 5 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИЛЕНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Тема 5.1 Неопределенный интеграл

Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла (с доказательством). Таблица основных интегралов.

Интегрирование методом разложения, замены переменной и по частям. Понятие о «неберущихся» интегралах.

Студенту необходимо, прежде всего, разобраться в принципиальном вопросе: интегральное исчисление решает обратную задачу – нахождение самой функции по ее производной. Эта задача является более сложной по сравнению с задачей дифференцирования.

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

f(x) – подынтегральная функция, f(x)dx – подынтегральное выражение, F(x) – первообразная функция, $\int$ – знак интеграла, C – константа.

Следует изучить свойства неопределенного интеграла, знать табличные интегралы. Обратить внимание на свойство: дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению $d(\int f(x)dx)=f(x)dx$, то есть операции интегрирования и дифференцирования взаимно обратны (знаки d и $\int$ взаимно уничтожают друг друга).

Непосредственное интегрирование предполагает сведение интегралов к табличным за счет тождественных преобразований и основных правил интегрирования.

Для вычисления интегралов применяют линейную подстановку $t=kx+b$, а также другие подстановки:

а) переменная интегрирования x заменяется функцией переменной t: $x=\varphi(t)$, а $dx=\varphi'(t)dt$; $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$;

б) новая переменная t вводится как функция переменной интегрирования x: $t=\varphi(x)$, $dt=\varphi'(x)dx$; $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(t)dt$.

Последнюю подстановку удобно применять, если подынтегральное выражение содержит дифференциал (производную) функции $\varphi(x)$ с точностью до постоянного множителя.

Если интеграл, полученный после замены переменной, стал «проще» данного (преобразован в табличный или приводящийся к табличному), то цель подстановки достигнута.

После интегрирования функции по переменной t необходимо вернуться к прежней переменной x, выразив t через x по формуле, применявшейся при подстановке.

Практическое применение формулы интегрирования по частям

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du,$$

если оно целесообразно, связано с проблемой правильного разбиения подынтегрального выражения на сомножители u и dv. Отметим, что формулу интегрирования по частям, как правило, удобно применять, если подынтегральная функция является произведением многочлена на тригонометрическую, показательную или логарифмическую функцию.

Тема 5.2 Определенный интеграл

Задача о вычислении площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Формула Ньютона – Лейбница.

Свойства определенного интеграла. Вычисление определенного интеграла методом замены переменной и по частям. Понятие о несобственных интегралах с бесконечными пределами интегрирования. Вычисление площадей плоских фигур. Приближенное вычисление определенного интеграла по формуле трапеций.

Студенту необходимо рассмотреть задачу о площади криволинейной трапеции и разобраться в том, что площадь криволинейной трапеции есть предел площади S под ломанной при неограниченном приближении ломанной к заданной кривой.

Необходимо разобраться с понятием интегральной суммы, ее геометрическим смыслом и перейти к понятию определенного интеграла

Студент должен знать, что в отличие от неопределенного интеграла, который является семейством кривых, определенный интеграл является числом и определенный интеграл вычисляется формулой Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

Благодаря этой формуле, интеграл вычисляется путем нахождения приращения первообразной для данной функции на отрезке интегрирования.

Достаточное условие интегрируемости функции на отрезке – непрерывность подынтегральной функции на этом отрезке.

Студент должен разобраться в методах интегрирования, изучив для этого свойства определенного интеграла и теорему о среднем.

Метод интегрирования по частям позволяет расширить класс интегрируемых функций за пределы табличных интегралов. При этом необходимо использовать приемы интегрирования по частям для неопределенного интеграла.

Метод подстановки также расширяет класс интегрируемых функций. При этом нужно помнить, что при введении новой переменной изменяются пределы интегрирования. После их изменения можно рассчитать определенный интеграл, не возвращаясь к старой переменной.

Несобственный интеграл вычисляется как интеграл с одним или с двумя неограниченными пределами. Подынтегральная функция определена и непрерывна на одном из промежутков $[a;+\infty)$, $(-\infty;b]$, $[-\infty;+\infty]$.

Если несобственный интеграл сходится, то он имеет конечный предел, если не сходится, то предел его равен бесконечности или не существует.

Для вычисления площадей плоских фигур необходимо уметь определять пределы интегрирования, если они не заданы и если площадь фигуры представляется в виде сумм или разностей криволинейных трапеций. Поэтому нужно построить кривые, ограничивающие плоские фигуры, определяют граничные условия (пределы интегрирования).

Тема 5.3 Дифференциальные уравнения

Понятие о дифференциальных уравнениях. Общее и частное решения. Задача Коши. Дифференциальные уравнения первого порядка (неполные, с разделяющимися переменными, однородные и линейные). Уравнения, допускающие понижения порядка. Линейные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

Студентам необходимо усвоить определение дифференциального уравнения – как уравнения, которое связывает искомую функцию одной или нескольких переменных и производные различных порядков данной функции.

Дифференциальные уравнения от одной переменной называется обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциальные уравнения от нескольких переменных – дифференциальные уравнения в частных производных.

Порядок дифференциального уравнения равен порядку старшей степени производной $xy'''-xy'+5=0$ – уравнение третьего порядка.

Нужно помнить, что задача интегрирования дифференциального уравнения – это задача нахождения искомого решения, а график решения называется интегральной кривой.

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка – это функция от переменных x и n произвольных независимых постоянных C_1, C_2, $C_0\ldots,C_n$.

Частное решение дифференциального уравнения – это решение, полученное из общего при некоторых значениях постоянных.

Для ряда типов дифференциальных уравнений нужно знать студенту основные понятия, нужно уметь решать однородные дифференциальные уравнения, линейные дифференциальные уравнения, неполные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

ВАРИАНТ №1

Задание №1. Найти матрицу C, если: $C=A^TB-2B^T$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание №2. Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса,
- по формулам Крамера,
- методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

Задание №3 На плоскости даны три точки A, B, C. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника ABC,
- точку M, симметричную точке A относительно стороны BC,
- уравнение медианы BK. A (2,3); B (1,3); C (-6,-4).

Задание №4 Определить фокусы, эксцентриситет, полуоси эллипса: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

Задание №5 Составить уравнение цилиндра, если ось коллинеарна вектору q(1,2,3), а направляющая задана уравнениями $y^2 = 4x$, $z = 0$.

Задание №6 Методом Лагранжа найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду для квадратичной формы

$$x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_2 .$$

ВАРИАНТ №2

Задание №1 Найти матрицу С, если: $C=AB^T-A^T$, $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 6 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

Задание №2 Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса,
- по формулам Крамера,
- методом обратной матрицы.

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3=1\\ 2x_1+2x_2+2x_3=2\\ 2x_1+x_2-x_3=12\end{cases}$$

Задание №3 На плоскости даны три точки А, В, С. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника АВС,
- точку М, симметричную точке А относительно стороны ВС,
- уравнение медианы ВК.

А (1,1); В (-3,3); С (-5,-2).

Задание №4 Определить фокусы, эксцентриситет, полуоси эллипса: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$

Задание №5 Составить уравнение цилиндра, если ось коллинеарна вектору q(1,1,1), а направляющая задана уравнениями $x^2 + y^2 + z^2=0$, $z=0$.

Задание №6 Методом Лагранжа найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду для квадратичной формы

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1.$$

ВАРИАНТ №3

Задание №1 Найти матрицу С, если: $C=A^TB-BA^T$, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 6 & 7\end{pmatrix}$.

Задание №2 Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса,
- по формулам Крамера,
- методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

Задание №3 На плоскости даны три точки A, B, C. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника ABC,
- точку M, симметричную точке A относительно стороны BC,
- уравнение медианы BK.

A (1,2); B (-2,3); C (-2,-3).

Задание №4 Определить фокусы, эксцентриситет, полуоси эллипса: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

Задание №5 Составить уравнение поверхности, образованной вращением прямой z = y, x = 0 вращением вокруг оси Oz.

Задание №6 Методом Лагранжа найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду для квадратичной формы.

$$4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_2 - 3x_2x_3$$

ВАРИАНТ №4

Задание №1 Найти матрицу C, если: C=AB^T-3B, A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Задание №2 Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса,
- по формулам Крамера,
- методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 4 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Задание №3 На плоскости даны три точки A, B, C. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника ABC,
- точку M, симметричную точке A относительно стороны BC,
- уравнение медианы BK.

A (2,1);   B (-3,2);   C (-1,-4).

Задание №4 Определить фокусы, эксцентриситет, полуоси эллипса: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$.

Задание №5 Составить уравнение конуса, вершина которого находится в точке M(1,-2,7), а направляющая задана уравнениями $x^2 = 1 - y^2 + z^2$, $z = y - x$.

Задание №6 Методом Лагранжа найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду для квадратичной формы.

$$11x_1^2+5x_2^2+2x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3-20x_2x_3.$$

ВАРИАНТ №5

Задание №1 Найти матрицу С, если: $C=2A^TB-BA^T$, $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 2 & 11\end{pmatrix}$.

Задание №2 Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса,
- по формулам Крамера,
- методом обратной матрицы.

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=3\\ 2x_1+x_2+x_3=11\\ x_1+x_2+2x_3=8\end{cases}$$

Задание №3 На плоскости даны три точки A, B, C. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника ABC,
- точку M, симметричную точке A относительно стороны BC,
- уравнение медианы BK.

A (1,3);   B (-2,2);   C (-3,-5).

Задание №4 Определить фокусы, эксцентриситет, полуоси эллипса: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$.

Задание №5 Составить уравнение поверхности, образованной вращением кривой $z = x^2$, $y = 0$ вокруг оси Oz.

Задание №6 Методом Лагранжа найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду для квадратичной формы.

$$x_1^2+x_2^2+5x_3^2-6x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3.$$

ВАРИАНТ №6

Задание №1 Найти матрицу С, если: $C=(B+AB)^T$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание №2 Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса,
- по формулам Крамера,
- методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Задание №3 На плоскости даны три точки А, В, С. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника АВС,
- точку М, симметричную точке А относительно стороны ВС,
- уравнение медианы ВК.

А (3,1); В (-3,1); С (2,-3).

Задание №4 Составить каноническое уравнение гиперболы, если действительная полуось равна a, эксцентриситет равен e: $a = 48$; $e = \frac{13}{12}$.

Задание №5 Составить уравнение поверхности, образованной вращением кривой $z = x^2$, $y = 0$ вокруг оси Ох.

Задание № 6 Методом Лагранжа найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду для квадратичной формы.

$$11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$$

ВАРИАНТ №7

Задание №1 Найти матрицу С, если: $C=(A-BA)^T$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

Задание №2 Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса,
- по формулам Крамера,
- методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Задание №3 На плоскости даны три точки A, B, C. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника ABC,
- точку M, симметричную точке A относительно стороны BC,
- уравнение медианы BK.

A (2,2); B (-1,3); C (0,-5).

Задание №4 Составить каноническое уравнение гиперболы, если действительная полуось равна a, эксцентриситет равен e: a = 36; e = $\frac{20}{18}$.

Задание №5 Составить уравнение поверхности, образованной вращением прямой z = y , x = 0 вокруг оси Oy.

Задание №6 Методом Лагранжа найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду для квадратичной формы.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

ВАРИАНТ №8

Задание №1 Найти матрицу C, если: C=(AB+BA)^T , A=$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Задание №2 Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса,
- по формулам Крамера,
- методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$$

Задание №3 На плоскости даны три точки A, B, C. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника ABC,
- точку M, симметричную точке A относительно стороны BC,
- уравнение медианы BK.

A (3,2); B (-2,1); C (-5,-5).

Задание №4 Составить каноническое уравнение гиперболы, если действительная полуось равна a, эксцентриситет равен e: a = 32; e = $\frac{18}{16}$.

Задание №5 Составить уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси Oz кривой z = $e^{x^{-2}}$, $y = 0$.

Задание №6 Методом Лагранжа найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду для квадратичной формы.

$$17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

ВАРИАНТ №9

Задание №1 Найти матрицу С, если: $C=2A(A-B)^T$, $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$.

Задание №2 Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса,
- по формулам Крамера,
- методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases}$$

Задание №3 На плоскости даны три точки А, В, С. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника АВС,
- точку М, симметричную точке А относительно стороны ВС,
- уравнение медианы ВК.

A (2,3); B (-1,2); C (-4,-4).

Задание №4 Составить каноническое уравнение гиперболы, если действительная полуось равна a, эксцентриситет равен e: a = 42; e = $\frac{24}{21}$.

Задание №5 Составить уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси Oz кривой $z = \frac{4}{x^2}$, $y = 0$.

Задание №6 Методом Лагранжа найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду для квадратичной формы.

$$x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

ВАРИАНТ №10

Задание №1 Найти матрицу С, если: $C=A^T(B+A)$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Задание №2 Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса,

- по формулам Крамера , $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$

- методом обратной матрицы.

Задание №3 На плоскости даны три точки A, B, C. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника ABC,
- точку M, симметричную точке A относительно стороны BC,
- уравнение медианы BK.

A (3,3); B (-1,1); C (0,-7).

Задание №4 Составить каноническое уравнение гиперболы, если действительная полуось равна a, эксцентриситет равен e: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$

Задание №5 Исследовать форму кривой Г, заданной уравнениями $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 36 \\ y + z = 0 \end{cases}$. Определить вид ее проекции на плоскость Oxy.

Задание №6 Методом Лагранжа найти нормальный вид и невырожденное линейное преобразование, приводящее к этому виду для квадратичной формы.

$$x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3 .$$

ВАРИАНТ №1

Задание №1 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2 + x + 1}{3 - x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

Задание №2 Найти производные функций: а) $y = \frac{x^2 + 1}{2x + 3}$; б) $y = 2\sqrt{\sin x}$.

Задание №3 Исследовать функцию и построить график: $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$.

Задание №4 Найти экстремумы функций двух переменных

$$z = 2x^3 + 6xy^2 - 30x - 24y.$$

Задание № 5. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{2 + x}{x^2} dx$ 2. $\int \frac{arctg\, x}{1 + x^2} dx$ 3. $\int x^2 e^{-x} dx$

Задание № 6. Найти определенные интегралы:

$$1.\ \int_0^{1/3} 2^{3x}dx \qquad 2.\ \int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx \qquad 3.\ \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x\,dx$$

Задание № 7. Выполнить чертеж и решить задачу: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = e^x,\ y = e^{-x},\ x = 1.$$

Задание № 8. Решить дифференциальное уравнение первого порядка:

$$x^2 dy = (y^2 + xy)dx$$

Задание № 9. Решить линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y'' + 9y = 6e^{3x}.$$

ВАРИАНТ №2

Задание №1 Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-125}{x-5}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{x^2+x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{3x}\right)^{x+3}$

Задание №2 Найти производные функций: а) $y = \dfrac{5}{x^3} + 3\sqrt{x}$; б) $y = 3e^{-2x}$.

Задание№3 Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x^3+x}{x^2+2x+3}$.

Задание №4 Найти экстремумы функций двух переменных

$$z = x^3 - y^3.$$

Задание № 5. Найти неопределенные интегралы:

$$1.\ \int \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}dx \qquad 2.\ \int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx \qquad 3.\ \int x^2 \sin 2x dx$$

Задание № 6. Найти определенные интегралы:

$$1.\ \int_{\pi/2}^{2\pi} \frac{\sin x dx}{1+\cos x} \quad 2.\ \int_1^e x^2 \ln x\,dx \quad 3.\ \int_0^{\pi/4} \sin x \cos 3x\,dx$$

Задание № 7. Выполнить чертеж и решить задачу: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2,\ y = \frac{x^3}{3}.$$

Задание № 8. Решить дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$$

Задание № 9. Решить линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y'' - 3y' = 2 - 6x.$$

ВАРИАНТ №3

Задание №1 Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 - 9x}{x^2 - 3x}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - 1}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x-3} \right)^x$.

Задание №2 Найти производные функций: а) $y = \frac{x^2 + 1}{2x + 3}$; б) $y = \ln(2x - 1)$.

Задание№3 Исследовать функцию и построить график: $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$.

Задание №4 Найти экстремумы функций двух переменных

$$z = 6x^2y + 2y^3 - 24x - 30y.$$

Задание № 5. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int (x^2 + 2x\sqrt[3]{x})dx$ 2. $\int x^2 e^{-2x} dx$ 3. $\int \frac{x}{1 + x^2} dx$

Задание № 6. Найти определенные интегралы:

1. $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^2 2x}$ 2. $\int\limits_0^1 \frac{arctg\, x}{1 + x^2} dx$ 3. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx$

Задание № 7. Выполнить чертеж и решить задачу: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2x^2, \; y = \sqrt{x}.$$

Задание № 8. Решить дифференциальное уравнение первого порядка:

$$ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$$

Задание № 9. Решить линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y'' + y = \cos x.$$

ВАРИАНТ №4

Задание №1 Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+3x^2-x}{x-3x^2+4x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x-3x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{4x}\right)^{x-2}$.

Задание №2 Найти производные функций: а) $y=\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{2}x^4$; б) $y=\sin 5x$

Задание№3 Исследовать функцию и построить график: $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$.

Задание №4 Найти экстремумы функций двух переменных

$$z = x^3 – 8y^3 – 6xy + 1.$$

Задание № 5. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int\dfrac{x^2+3x}{x^3}dx$ 2. $\int 3^x\sin x dx$ 3. $\int\dfrac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$

Задание № 6. Найти определенные интегралы:

1. $\int\limits_0^{\pi/2}e^{\sin x}\cos x dx$ 2. $\int\limits_0^1\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ 3. $\int\limits_0^{1/2}xe^{2x}dx$

Задание № 7. Выполнить чертеж и решить задачу: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2=2x+1,\ x-y-1=0.$$

Задание № 8. Решить дифференциальное уравнение первого порядка:

$$xdy+(2y-x)dx=0$$

Задание № 9. Решить линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y''-8y'+7y=14.$$

ВАРИАНТ №5

Задание №1 Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x^3}{x-2x^2+6x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x}$.

Задание №2 Найти производные функций: а) $y=2^x+x^2$; б) $y=arctg 3x$

Задание№3 Исследовать и построить график: $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$.

Задание №4 Найти экстремумы функций двух переменных

$$z = x^3 - xy^2 + 3x^2 + y^2 - 1.$$

Задание № 5. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{1}{2x} - x\sqrt[5]{x^3}\,dx$ 2. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}dx$ 3. $\int \frac{x}{\sqrt{1-3x^3-2x^4}}dx$

Задание № 6. Найти определенные интегралы:

1. $\int_0^1 \frac{x^3dx}{3+x^4}$ 2. $\int_0^1 \frac{3^x}{1+9^x}dx$ 3. $\int_0^{1/3} x e^{3x}\,dx$

Задание № 7. Выполнить чертеж и решить задачу: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 + 1,\ y = x + 1.$$

Задание № 8. Решить дифференциальное уравнение первого порядка:

$$(x+y)dx + (y-x)dy = 0$$

Задание № 9. Решить линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y'' - y = e^x.$$

ВАРИАНТ №6

Задание №1 Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2+8x^3}{x+2x^3-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$.

Задание №2 Найти производные функций: а) $y = 3tgx - \sqrt{x}$; б) $y = (5x^2+3)^6$.

Задание№3 Исследовать функцию и построить график: $y = \frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

Задание №4 Найти экстремумы функций двух переменных

$$z = x^2y - \frac{1}{3}y^3 + 2x^2 + 3y^2 - 1.$$

Задание № 5. Найти неопределенные интегралы:

$$1.\ \int\left(\frac{1}{x^5}+2x^4\right)dx \qquad 2.\ \int\frac{3^x}{\sqrt{1+3^x}}dx \qquad 3.\ \int\frac{1}{x(x+1)^2}dx$$

Задание № 6. Найти определенные интегралы:

$$1.\ \int_{-2/3}^{0}(4+6x)^3dx \qquad 2.\ \int_0^1\frac{2^x}{1+2^x}dx \quad 3.\ \int_0^1\arcsin x\,dx$$

Задание № 7. Выполнить чертеж и решить задачу: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=x^2+4x,\ y=x+4.$$

Задание № 8. Решить дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y'+xy=x^3y^3$$

Задание № 9. Решить линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y''-2y'-y=e^{-x}.$$

ВАРИАНТ №7

Задание №1 Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sin 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

Задание №2 Найти производные функций: а) $y=-3x^{-5}+15x^{-4}$; б) $y=e^{x^3}$.

Задание №3 Исследовать функцию и построить график: $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}$.

Задание №4 Найти экстремумы функций двух переменных

$$z = x^3 + 6xy + 3y^2 - 18x - 18y.$$

Задание № 5. Найти неопределенные интегралы:

$$1.\ \int\frac{2x\sqrt{x}}{x^2}dx \quad 2.\ \int\frac{x}{\sqrt{2x^2-x+2}}dx \quad 3.\ \int\frac{\ln^2x+\ln x+1}{x}dx$$

Задание № 6. Найти определенные интегралы:

$$1.\ \int_0^{\pi/2}\sin^2x\cos x\,dx \qquad 2.\ \int_0^{\pi/4}tg\,x\,dx \qquad 3.\ \int_0^1 arctg\,x\,dx$$

Задание № 7. Выполнить чертеж и решить задачу: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2=x+1,\ y=x^2+2x+1.$$

Задание № 8. Решить дифференциальное уравнение первого порядка:

$$2xydy = (x^2 + y^2)dx$$

Задание № 9. Решить линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$3y'' + 4y' = 8x + 6.$$

ВАРИАНТ №8

Задание №1 Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-4}{\sqrt{x^8+3x^4-x}}$.

Задание №2 Найти производные функций: а) $y = 4x^{\frac{3}{4}} + 4x^{\frac{1}{2}} + 3x$;

б) $y = 3\ln x - x^2$.

Задание№3 Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x^3+1}{x^2-2x+2}$.

Задание №4 Найти экстремумы функций двух переменных

$$z = x^2y - y^3 - x^2 - 3y^2 + 3.$$

Задание № 5. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}})dx$ 2. $\int\dfrac{1}{(1-x)(x+2)(x+3)}dx$ 3. $\int\sin 5x\sin x\,dx$

Задание № 6. Найти определенные интегралы:

1. $\int\limits_0^1 \ln(x+2)\,dx$ 2. $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$ 3. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}dx$

Задание № 7. Выполнить чертеж и решить задачу: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \frac{1}{1+x^2},\ y = \frac{x^2}{2}.$$

Задание № 8. Решить дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' + y\cos x = \sin 2x$$

Задание № 9. Решить линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y''+y'-2y=8\sin 2x.$$

ВАРИАНТ №9

Задание №1 Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{5x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Задание №2 Найти производные функций: а) $y=\sqrt[3]{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{x^2}$;

б) $y=\sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

Задание№3 Исследовать функцию и построить график: $y=1-\dfrac{4}{x^2}$.

Задание №4 Найти экстремумы функций двух переменных

$$z = 3x^2 - 6xy - y^3 - 12x + 12y.$$

Задание № 5. Найти неопределенные интегралы:

1. $\int\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}\right)dx$ 2. $\int\dfrac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$ 3. $\int\dfrac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$

Задание №6. Найти определенные интегралы:

1. $\int\limits_{e}^{e^2}\dfrac{dx}{x\ln x}$ 2. $\int\limits_{0}^{\pi/2}x^2\cos x\,dx$ 3. $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$

Задание № 7. Выполнить чертеж и решить задачу: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y^2=4x,\ x^2=4y.$$

Задание № 8. Решить дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$$

Задание № 9. Решить линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y''-y=e^{-x}.$$

ВАРИАНТ №10

Задание №1 Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$;

$$\text{в) } \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 2x}.$$

Задание №2 Найти производные функций: а) $y = 3\ln x - x^3$; б) $y = \cos^2 x$.

Задание№3 Исследовать функцию и построить график: $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$.

Задание №4 Найти экстремумы функций двух переменных

$$z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

Задание № 5. Найти неопределенные интегралы:

$$1.\ \int\frac{2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt{x}}dx \qquad 2.\ \int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx \qquad 3.\ \int\frac{3+ctg^2 x}{\sin^2 x}dx$$

Задание № 6. Найти определенные интегралы:

$$1.\ \int_0^1\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx \quad 2.\ \int_0^{\pi} x\sin x\,dx \quad 3.\ \int_{\sqrt{2/2}}^{1}\frac{arctg\,x}{1+x^2}dx$$

Задание № 7. Выполнить чертеж и решить задачу: Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2,\ y = \sqrt{-x}.$$

Задание № 8. Решить дифференциальное уравнение первого порядка:

$$(x+y)dx + xdy = 0$$

Задание № 9. Решить линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x.$$

Студент должен выполнить в установленный срок контрольную работу.

Прежде чем приступить к выполнению работы, необходимо ознакомиться с соответствующими разделами программы курса, а затем подобрать рекомендованную программой литературу, изучить ее, обратив особое внимание на технику расчета и метод построения показателей.

При оформлении решения задач контрольной работы, необходимо руководствоваться следующими требованиями.

Перед решением задачи привести ее условие.

Решение задачи сопровождать формулами, развернутыми расчетами, краткими определениями и пояснениями показателей. Если имеется несколько методов расчета того или иного показателя, то применить нужно наиболее простой из них, указав при этом и другие возможные способы решения. Индексы необходимо вычислять с точностью до 0,001, проценты – до 0,1, а заработную плату, производительность труда – в рублях, численность работников – в человеках.

При решении задач нужно проверять производимые расчеты, пользуясь взаимосвязью между исчисляемыми показателями, а также обращая внимание на экономическое содержание результатов. Задачи, по которым будут даны ответы без развернутых расчетов, пояснений, определений показателей и кратких выводов, считаются нерешенными.

Контрольная работа оформляется в ученической тетради, пишется от руки, разборчиво, без помарок и сокращений (кроме общепринятых), страницы нумеруются. Необходимо оставлять широкие поля для замечаний рецензента и исправлений (дополнений), вносимых студентом после рецензирования. В конце работы приводится список использованной литературы (автор, название, издательство, год издания, глава, параграф, страница). Работа подписывается студентом с указанием даты ее выполнения.

Таблица соотношения начальной буквы фамилии студента и варианта контрольных заданий

Начальная буква фамилии	Вариант задания
А, Б, В	Первый
Г, Д, Е	Второй
Ж, З, И	Третий
К, Л	Четвертый
М, Н	Пятый
О, П, Р	Шестой
С, Т, У	Седьмой
Ф, Х, Ц	Восьмой
Ф, Х, Ц	Девятый
Э,Ю,Я	Десятый

РЕКОМЕНДУЕМЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

1. Математика для экономистов [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.И. Макаров. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2016. — 264 с. — ISBN 978-5-406-05090-3. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/918834 — ЭБС BOOK.ru, по паролю
2. Математика для экономистов. Задачник [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.И. Макаров под ред., М.В. Мищенко под ред. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2016. — 358 с. — ISBN 978-5-406-04700-2. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/918106 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Дополнительная литература:

3. Математика для экономистов [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.И. Макаров. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2015. — 264 с. — ISBN 978-5-406-04283-0. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/918784 — ЭБС BOOK.ru, по паролю
4. Математика и информатика [Электронный ресурс] : учебное пособие / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев, В.Б. Уткин. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2017. — 361 с. — Бакалавриат. — ISBN 978-5-406-00864-5. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/922019 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Приложение 1

Таблица производных и интегралов

Производная	Интеграл	Дифференциал
$C' = 0$	$\int dx = x + C$	$xdx = \frac{1}{2}dx^2$
$x' = 1$	$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$	$x^2dx = \frac{1}{3}dx^3$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$	$x^ndx = \frac{1}{n+1}d(x^{n+1})$
$(e^x)' = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + C$	$e^xdx = d(e^x)$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$a^xdx = \frac{d(a^x)}{\ln a}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C\ (x \neq 0)$	$\frac{1}{x}dx = d(\ln x)$
$(\log_a\ x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\cos xdx = d(\sin x)$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$\sin xdx = -d(\cos x)$
$(cosx)' = -\sin x$	$\int tg\,x\,dx = -\ln\|\cos x\| + C$	$\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(tg\ x)$
$(tg\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int ctg\,x\,dx = \ln\|\sin x\| + C$	$\frac{1}{\sin^2 x}dx = -d(ctg\ x)$
$(ctg\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d(\arcsin x)$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -d(\arccos x)$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\|tg\,(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\| + C$	$\frac{1}{1+x^2}dx = d(arctg\ x)$
$(arctg\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\|tg\,\frac{x}{2}\| + C$	$\frac{1}{1+x^2}dx = -d(arcctg\ x)$
$(arcctg\ x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	
$(sh\ x)' = ch\,x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \ln\|x + \sqrt{a+x^2}\| + C$	
$(ch\ x)' = sh\,x$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C$	
$(th\ x)' = \frac{1}{ch^2 x}$	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$	
$(cth\ x)' = -\frac{1}{sh^2 x}$	$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$	
$(x^x)' = x^x(1 + \ln x)$	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm$ $\pm\frac{a^2}{2}\ln\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\| + C$	
$(Cf)' = Cf'$ $(f+g)' = f' + g'$ $(fg)' = f'g + fg'$ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$	$\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)\,dx$ $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ $\int df(x) = f(x) + C$	$d(Cf) = Cdf$ $d(f+g) = df + dg$ $d(fg) = gdf + fdg$ $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$