МУРМАНСКАЯ АКАДЕМИЯ ЭКОНОМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ

УТВЕРЖДАЮ
Начальник учебно-
методического управления
________ Ю.В. Бирюков
«21» февраля 2018 г

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по выполнению домашней контрольной работы №2 по дисциплине
МАТЕМАТИКА

Специальность
38.05.01 Экономическая безопасность

Специализация №1
Экономико-правовое обеспечение экономической безопасности

Мурманск
2018

Математика: Методические рекомендации по выполнению домашней контрольной работы / Мурманск: ЧОУ ВО «МАЭУ», 2018. – 46 с.

Математика: Методические рекомендации по выполнению домашней контрольной работы: Предназначены для обучающихся по программе специалитета по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность»: для студентов заочной формы обучения

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель курса математики состоит в освоение необходимого математического аппарата. Это необходимо для анализа моделирования и решения прикладных задач, с использованием ЭВМ.

Задачи изучения математики как фундаментальной дисциплины состоят в развитии логического и алгоритмического мышления, в выработке умения моделировать реальные процессы.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций, представленных в таблице.

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине «Математика», соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Таблица 1− Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине

Код компетенции	Наименование компетенции	Вид деятельности и проф. задачи	Планируемые результаты	Уровень освоения компетенции
ОПК-1	способностью применять математический инструментарий для решения экономических задач		<u>*знать:*</u> − роль и место информации в развитии современного информационного общества; <u>*уметь:*</u> − выделять наиболее существенные факты в профессиональной деятельности; <u>*владеть:*</u> − способностью выстраивать перспективные стратегии личностного и профессионального развития.	Пороговый
			<u>*знать:*</u> − роль и место информации в развитии современного информационного общества; − основные положения изучаемого курса. <u>*уметь:*</u> − выделять наиболее существенные факты в	Базовый

			профессиональной деятельности; *владеть:* – способностью выстраивать перспективные стратегии личностного и профессионального развития.	
			знать: – роль и место информации в развитии современного информационного общества; – основные положения изучаемого курса. *уметь:* – выделять наиболее существенные факты в профессиональной деятельности; – адекватно оценивать итоги своих образовательных и научных результатов. *владеть:* способностью выстраивать перспективные стратегии личностного и профессионального развития.	Продвинутый

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

Основные понятия

Определение. Событием называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта. При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности. Т.е. в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда. В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие А может произойти совместно с событием В, в другом – нет.

Определение. События называются несовместными, если появление одного из них исключает появление других. Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте). Определение. Полной группой событий называется совокупность всех возможных результатов опыта.

Определение. Достоверным событием называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется невозможным, если оно никогда не произойдет в результате опыта. Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

Определение. События называются равновозможными, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью. В приведенном выше примере появление красного и зеленого шаров – равновозможные события, если в коробке находится одинаковое количество красных и зеленых шаров. Если же в коробке красных шаров больше, чем зеленых, то появление зеленого шара – событие менее вероятное, чем появление красного. Исходя из этих общих понятий можно дать определение вероятности.

Определение. Вероятностью события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события А равна отношению числа, благоприятствующих событию А исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий. $P(A) = \frac{m}{n}$ Исход опыта является благоприятствующим событию А, если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события А. Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей. $0 \le P(A) \le 1$

Пример. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым. Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий. Обозначим появление красного шара – событие А, появление зеленого – событие В, появление белого – событие С. Тогда в соответствием с записанными выше формулами получаем: $P(A) = \frac{3}{10}; \quad P(B) = \frac{2}{10}; \quad P(C) = \frac{5}{10};$ Отметим, что вероятность наступления одного из двух попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Определение. Относительной частотой события А называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие А к общему числу опытов. Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта. Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна: $W(A) = \frac{2}{5}$ Как видно, эта величина не совпадает с найденной вероятностью. При достаточно большом числе произведенных опытов относительная частота изменяется мало, колеблясь около одного числа. Это число может быть принято за вероятность события. Вообще говоря, классическое определение вероятности – довольно относительное. Это обусловлено тем, что на практике сложно представить результат опыта в виде совокупности элементарных событий, доказать, что события равновероятные. К примеру при произведении опыта с подбрасыванием монеты на результат опыта могут влиять такие факторы как несимметричность монеты, влияние ее формы на аэродинамические характеристики полета, атмосферные условия и т.д. Классическое определение вероятности неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов. Чтобы преодолеть этот недостаток вводится понятие геометрической вероятности, т.е. вероятности попадания точки в какой – либо отрезок или часть плоскости (пространства). Так если на отрезке длиной L выделен отрезок длины l, то вероятность попадания наугад взятой точки в отрезок равна отношению l/L.

Операции над событиями

Определение. События А и В называются равными, если осуществление события А влечет за собой осуществление события В и наоборот.

Определение. Объединением или суммой событий Ak называется событие А, которое означает появление хотя бы одного из событий Ak. $A = \bigcup_k A_k$ Определение. Пересечением или произведением событий Ak называется событие А, которое заключается в осуществлении всех событий Ak. $A = \bigcap_k A_k$

Определение. Разностью событий А и В называется событие С, которое означает, что происходит событие А, но не происходит событие В. $C = A \setminus B$

Определение. Дополнительным к событию А называется событие $\overline{A}$, означающее, что событие А не происходит.

Определение. Элементарными исходами опыта называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие А, по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие. Совокупность всех элементарных исходов опыта называется пространством элементарных событий.

Теорема (сложения вероятностей). Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий. $P(A+B) = P(A) + P(B)$ Следствие 1: Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице. $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

Определение. Противоположными называются два несовместных события, образующие полную группу. Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

Следствие 2: Сумма вероятностей противоположных событий равна единице. $P(A)+P(\overline{A})=1$

Определение. Событие А называется независимым от события В, вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет. Событие А называется зависимым от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

Определение. Вероятность события В, вычисленная при условии, что имело место событие А, называется условной вероятностью события В. $P(AB)=P(A)P(B/A)=P(A)P_A(B)$ $P_A(B)=P(B/A)=P(AB)/P(A)$

Теорема. (Умножения вероятностей) Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило. Также можно записать: $P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)=P(B)P_B(A)$ Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из определения условной вероятности. Если события независимые, то $P(B/A)=P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид: $P(AB)=P(A)P(B)$ В случае произведения нескольких зависимых событий вероятность равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных при условии, что вероятность каждого последующего вычисляется в предположении, что все остальные события уже совершились. $P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})$ Из теоремы произведения вероятностей можно сделать вывод о вероятности появления хотя бы одного события. Если в результате испытания может появиться n событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна $P(A)=1-q_1q_2...q_n$ Здесь событие А обозначает наступление хотя бы одного из событий Ai, а qi – вероятность противоположных событий $\overline{A}_1,\overline{A}_2,...,\overline{A}_n$.

Пример. Из полной колоды карт (52 шт.) одновременно вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что среди этих четырех карт будет хотя бы одна бубновая или одна червонная карта. Обозначим появление хотя бы одной бубновой карты – событие А, появление хотя бы одной червонной карты – событие В. Таким образом нам надо определить вероятность события С = А + В. Кроме того, события А и В – совместны, т.е. появление одного из них не исключает появления другого. Всего в колоде 13 червонных и 13 бубновых карт. При вытаскивании первой карты вероятность того, что не появится ни червонной ни бубновой карты равна $\frac{26}{52}$, при вытаскивании второй карты - $\frac{25}{51}$, третьей - $\frac{24}{50}$, четвертой - $\frac{23}{49}$. Тогда вероятность того, что среди вынутых карт не будет ни бубновых, ни червонных равна $P(\overline{C}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49}$. Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}945$

<u>Пример.</u> Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей? Вероятность выпадения 6 очков при одном броске кости равна $\frac{1}{6}$. Вероятность того, что не выпадет 6 очков - $\frac{5}{6}$. Вероятность того, что при броске трех костей не выпадет ни разу 6 очков равна $p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$. Тогда вероятность того, что хотя бы один раз выпадет 6 очков равна $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

<u>Пример.</u> В барабане револьвера находятся 4 патрона из шести в произвольном порядке. Барабан раскручивают, после чего нажимают на спусковой крючок два раза. Найти вероятности хотя бы одного выстрела, двух выстрелов, двух осечек. Вероятность выстрела при первом нажатии на курок (событие А) равна $P(A) = \frac{4}{6}$, вероятность осечки - $P(\overline{A}) = \frac{2}{3}$. Вероятность выстрела при втором нажатии на курок зависит от результата первого нажатия. Так если в первом случае произошел выстрел, то в барабане осталось только 3 патрона, причем они распределены по 5 гнездам, т.к. при втором нажатии на курок напротив ствола не может оказаться гнездо, в котором был патрон при первом нажатии на курок. Условная вероятность выстрела при второй попытке - $P(B/A) = \frac{3}{5}$, если в первый раз был выстрел, $P(B/\overline{A}) = \frac{4}{5}$ - если в первый раз произошла осечка. Условная вероятность осечки во второй раз - $P(\overline{B}/A) = \frac{2}{5}$, если в первый раз произошел выстрел, $P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{1}{5}$ - если в первый раз была осечка. Рассмотрим вероятности того, что во втором случае произойдет выстрел (событие В) или произойдет осечка (событие $\overline{B}$) при условии, что в первом случае произошел выстрел (событие А) или осечка (событие $\overline{A}$).

$P(B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = 0{,}4$ - два выстрела подряд

$P(B) = P(\overline{A})P(B/\overline{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$ - первая осечка, второй выстрел

$P(\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$ - первый выстрел, вторая осечка

$P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \approx 0{,}067$ - две осечки подряд. Эти четыре случая образуют полную группу событий (сумма их вероятностей равна единице)

Анализируя полученные результаты, видим, что вероятность хотя бы одного выстрела равна сумме $P_1 = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{14}{15} \approx 0,933$ Теперь рассмотрим другой случай. Предположим, что после первого нажатия на курок барабан раскрутили и опять нажали на курок. Вероятности первого выстрела и первой осечки не изменились - $P(A) = \frac{4}{6}$, $P(\overline{A}) = \frac{2}{6}$. Условные вероятности второго выстрела и осечки вычисляются из условия, что напротив ствола может оказаться то же гнездо, что и в первый раз. Условная вероятность выстрела при второй попытке - $P(B / A) = \frac{3}{6}$, если в первый раз был выстрел, $P(B / \overline{A}) = \frac{4}{6}$ - если в первый раз произошла осечка. Условная вероятность осечки во второй раз - $P(\overline{B} / A) = \frac{3}{6}$, если в первый раз произошел выстрел, $P(\overline{B} / \overline{A}) = \frac{2}{6}$ - если была осечка. Тогда: $P(B) = P(A)P(B / A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{9} \approx 0,333$ - два выстрела подряд $P(B) = P(\overline{A})P(B / \overline{A}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{9} \approx 0,222$ - первая осечка, второй выстрел $P(\overline{B}) = P(A)P(\overline{B} / A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{9} \approx 0,333$ - первый выстрел, вторая осечка $P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B} / \overline{A}) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9} \approx 0,111$ - две осечки подряд В этом случае вероятность того, что произойдет хотя бы один выстрел, равна $P_2 = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9} \approx 0,889$

Пример. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков. Обозначим попадание в цель первым стрелком – событие А, вторым – событие В, промах первого стрелка – событие $\overline{A}$, промах второго – событие $\overline{B}$. $P(A) = 0,7; \quad P(\overline{A}) = 0,3; \quad P(B) = 0,8; \quad P(\overline{B}) = 0,2.$ Вероятность того, что первый стрелок попадет в мишень, а второй – нет равна $P(A)P(\overline{B}) = 0,7 \cdot 0,2 = 0,14$ Вероятность того, что второй стрелок попадет в цель, а первый – нет равна $P(\overline{A})P(B) = 0,3 \cdot 0,8 = 0,24$ Тогда вероятность попадания в цель только одним стрелком равна $P = 0,14 + 0,24 = 0,38$ Тот же результат можно получить другим способом – находим вероятности того, что оба стрелка попали в цель и оба промахнулись. Эти вероятности соответственно равны: $P(A)P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56; \quad P(\overline{A})P(\overline{B}) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06.$ Тогда вероятность того, что в цель попадет только один стрелок равна: $P = 1 - 0,56 - 0,06 = 0,38.$

Пример. Вероятность того, что взятая наугад деталь из некоторой партии деталей, будет бракованной равна 0,2. Найти вероятность того, что из трех взятых деталей 2 окажется не бракованными. Обозначим бракованную деталь – событие А, не бракованную – событие $\overline{A}$. $P(A)=0,2;$ $P(\overline{A})=0,8;$ Если среди трех деталей оказывается только одна бракованная, то это возможно в одном из трех случаев: бракованная деталь будет первой, второй или третьей. $P=P(A)P(\overline{A})P(\overline{A})+P(\overline{A})P(A)P(\overline{A})+P(\overline{A})P(\overline{A})P(A)$ $P=3\cdot 0,2\cdot 0,8\cdot 0,8=0,384$

Пример. Вероятности того, что нужная деталь находится в первом, втором, третьем или четвертом ящике, соответственно равны 0,6, 0,7, 0,8, 0,9. Найти вероятности того, что эта деталь находится:

а) не более, чем в трех ящиках;

б) не менее, чем в двух ящиках.

а) Вероятность того, что данная деталь находится во всех четырех ящиках, равна $P=P_1P_2P_3P_4=0,6\cdot 0,7\cdot 0,8\cdot 0,9=0,3024.$ Вероятность того, что нужная деталь находиться не более, чем в трех ящиках равна вероятности того, что она не находится во всех четырех ящиках. $P(A)=1-P=1-0,3024=0,6976$.

б) Вероятность того, что нужная деталь находится не менее, чем в двух ящиках, складывается из вероятностей того, что деталь находиться только в двух ящиках, только в трех ящиках, только в четырех ящиках. Конечно, эти вероятности можно посчитать, а потом сложить, однако, проще поступить иначе. Та же вероятность равна вероятности того, что деталь не находится только в одном ящике и имеется вообще.

Вероятность того, что деталь находится только в одном ящике, равна

$$P=P_1q_2q_3q_4+q_1P_2q_3q_4+q_1q_2P_3q_4+q_1q_2q_3P_4$$

$$P=0,6\cdot 0,3\cdot 0,2\cdot 0,1+0,4\cdot 0,7\cdot 0,2\cdot 0,1+0,4\cdot 0,3\cdot 0,8\cdot 0,1+0,4\cdot 0,3\cdot 0,2\cdot 0,9=$$

$$=0,0036+0,0056+0,0096+0,0216=0,0404\quad Q=1-0,0404=0,9596$$

Вероятность того, что нужной деталь нет ни в одном ящике, равна: $P_0=q_1q_2q_3q_4=0,4\cdot 0,3\cdot 0,2\cdot 0,1=0,0024$

$Q_0=1-0,0024=0,9976$

Искомая вероятность равна $P(B)=Q\cdot Q_0=0,9596\cdot 0,9976=0,9573.$

Формула полной вероятности

Пусть некоторое событие А может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1,H_2,\dots,H_n$, составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1),P(H_2),\dots,P(H_n)$ и условные вероятности наступления события А при наступлении события Hi $P(A/H_1),P(A/H_2),\dots,P(A/H_n)$

Теорема. Вероятность события А, которое может произойти вместе с одним из событий $H_1,H_2,\dots,H_n$, равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события А. $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)$ Фактически эта формула полной вероятности уже использовалась при решении примеров, приведенных выше, например, в задаче с револьвером.

Пример. Один из трех стрелков производит два выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадут два раза. Вероятность того, что выстрелы производит первый, второй или третий стрелок равна $\frac{1}{3}$. Вероятности того, что один из стрелков, производящих выстрелы, два раза попадает в цель, равны: - для первого стрелка: $p_1^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16;$ - для второго стрелка: $p_2^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36;$ - для третьего стрелка: $p_3^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64;$

Искомая вероятность равна: $p = \frac{1}{3}p_1^2 + \frac{1}{3}p_2^2 + \frac{1}{3}p_3^3 = \frac{1}{3}(0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}64) = \frac{29}{75}$

Формула Бейеса (формула гипотез)

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$ с известными вероятностями их наступления $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$. Пусть в результате опыта наступило событие А, условные вероятности которого по каждой из гипотез известны, т.е. известны вероятности $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$. Требуется определить какие вероятности имеют гипотезы $H_1, H_2, ..., H_n$ относительно события А, т.е. условные вероятности $P(H_i/A)$.

Теорема. Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$$

Эта формула называется формулой Бейеса. Если до испытания все гипотезы равновероятны с вероятностью $P(H_i) = p$, то формула Бейеса принимает вид:

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)}$$

Формула Бернулли

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие А, и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются независимыми относительно события А. Допустим, что событие А наступает в каждом испытании с вероятностью Р(А)=р. Определим вероятность Р того, что в результате п испытаний событие А наступило ровно т раз. Эту вероятность в принципе можно посчитать, используя теоремы сложения и умножения вероятностей, как это делалось в рассмотренных выше примерах. Однако, при достаточно большом количестве испытаний это приводит к очень большим вычислениям. Таким образом, возникает необходимость разработать общий подход к решению поставленной задачи. Этот подход реализован в формуле Бернулли. (Якоб Бернулли (1654 – 1705) – швейцарский математик) Пусть в результате n независимых испытаний, проведенных в одинаковых условиях, событие А наступает с вероятностью Р(А) = р, а противоположное ему событие $\overline{A}$ с вероятностью $P(\overline{A}) = 1 - p$. Обозначим A_i – наступление события А в испытании с номером i. Т.к. условия проведения опытов одинаковые, то эти вероятности равны. Если в результате n опытов событие А наступает ровно т раз, то остальные n -т раз это событие не наступает. Событие А может появиться т раз в n испытаниях в различных комбинациях, число которых равно количеству сочетаний из n элементов по т. Это количество сочетаний находится по формуле: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ Вероятность каждой комбинации равна произведению вероятностей: $p^m(1-p)^{n-m}$

Применяя теорему сложения вероятностей несовместных событий, получаем формулу Бернулли: $P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}$ Формула Бернулли важна тем, что справедлива для любого количества независимых испытаний, т.е. того самого случая, в котором наиболее четко проявляются законы теории вероятностей. Пример. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятность того, что в цель попали не менее трех раз. Вероятность не менее трех попаданий складывается из вероятности пяти попаданий, четырех попаданий и трех попаданий. Т.к. выстрелы независимы, то можно применить формулу Бернулли вероятности того, что в т испытаниях событие в вероятностью р наступает ровно п раз. $P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}$ В случае пяти попаданий из пяти возможных: $P_{5,5} = p^5 = 0,4^5 = 0,01024$ Четыре попадания из пяти выстрелов: $P_{4,5} = \frac{5!}{4!\,1!}p^4(1-p) = 0,0768$ Три попадания из пяти: $P_{3,5} = \frac{5!}{3!\,2!}p^3(1-p)^2 = 0,2304$ Окончательно, получаем вероятность не менее трех попаданий из пяти выстрелов: $P = 0,01204 + 0,0768 + 0,2304 = 0,31744$ Случайные величины. Выше рассматривались случайные события, являющиеся качественной характеристикой случайного результата опыта. Для получения количественной характеристики вводится понятие случайной величины.

Определение. Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно. Случайные величины можно разделить на две категории.

Определение. Дискретной случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы). Это множество может быть как конечным, так и бесконечным. Например, количество выстрелов до первого попадания в цель является дискретной случайной величиной, т.к. эта величина может принимать и бесконечное, хотя и счетное количество значений.

Определение. Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно. Для задания случайной величины недостаточно просто указать ее значение, необходимо также указать вероятность этого значения. Закон распределения дискретной случайной величины. Определение. Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется законом распределения дискретной случайной величины. Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически. Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется рядом распределения. Графическое представление этой таблицы называется многоугольником распределения. При этом сумма все ординат многоугольника распределения представляет собой вероятность всех возможных значений случайной величины, а, следовательно, равна единице. Пример. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятности числа попаданий и построить многоугольник распределения. Вероятности пяти попаданий из пяти возможных, четырех из пяти и трех из пяти были найдены выше по формуле Бернулли и равны соответственно: $P_{5,5}=0{,}01024$, $P_{4,5}=0{,}0768$, $P_{3,5}=0{,}2304$ Аналогично найдем: $P_{2,5}=\frac{5!}{2!\cdot 3!}0{,}4^2\cdot 0{,}6^3=0{,}3456$ $P_{1,5}=\frac{5!}{1!\cdot 4!}0{,}4^1\cdot 0{,}6^4=0{,}2592$ $P_{0,5}=\frac{5!}{0!\cdot 5!}0{,}4^0\cdot 0{,}6^5=0{,}6^5=0{,}0778$

При построении многоугольника распределения надо помнить, что соединение полученных точек носит условный характер. В промежутках между значениями случайной величины вероятность не принимает никакого значения. Точки соединены только для наглядности.

Пример. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень стрелком при трех выстрелах равна 0,875. Найти вероятность попадания в мишень при одном выстреле. Если обозначить р – вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле, то вероятность промаха при одном выстреле, очевидно, равна (1 – р). Вероятность трех промахов из трех выстрелов равна $(1 - p)^3$. Эта вероятность равна 1 – 0,875 = 0,125, т.е. в цель не попадают ни одного раза. Получаем: $(1-p)^3=0{,}125;\quad 1-p=0{,}5;\quad p=0{,}5.$

Пример. В первой коробке содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй коробке 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой коробки наугад извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наугад берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый. Вероятность того, что взятый из первой коробки шар белый - $P_1(Б)=0{,}8,$ что не белый - $P_1(НБ)=0{,}2$. Вероятность того, что взятый из второй коробки шар белый - $P_2(Б)=0{,}2,$ что не белый - $P_2(НБ)=0{,}8.$ Вероятность того, что повторно выбран шар, извлеченный из первой коробки и вероятность того, что повторно выбран шар, извлеченный из второй коробки, равны 0,5. Вероятность того, что повторно выбран шар, извлеченный из первой коробки, и он белый - $p_1=0{,}5\cdot P_1(Б)=0{,}5\cdot 0{,}8=0{,}4.$ Вероятность того, что повторно выбран шар, извлеченный из второй коробки, и он белый - $p_2 = 0,5 \cdot P_2(Б) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$. Вероятность того, что повторно будет выбран белый шар, равна $P = p_1 + p_2 = 0,4 + 0,1 = 0,5$.

Пример. Имеется пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит цель при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95, для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что цель будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наугад выбранной винтовки. Вероятность того, что выбрана винтовка с оптическим прицелом, обозначим $P_0 = \frac{3}{5}$, а вероятность того, что выбрана винтовка без оптического прицела, обозначим $P_{БО} = \frac{2}{5}$. Вероятность того, что выбрали винтовку с оптическим прицелом, и при этом цель была поражена $P_1 = P_0 \cdot P(ПЦ/О)$, где Р(ПЦ/О) – вероятность поражения цели из винтовки с оптическим прицелом. Аналогично, вероятность того, что выбрали винтовку без оптического прицела, и при этом цель была поражена $P_1 = P_{БО} \cdot P(ПЦ/БО)$, где Р(ПЦ/БО) – вероятность поражения цели из винтовки без оптического прицела. Окончательная вероятность поражения цели равна сумме вероятностей Р1 и Р2, т.к. для поражения цели достаточно, чтобы произошло одно из этих несовместных событий. $P = P_1 + P_2 = 0,95 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,4 = 0,57 + 0,28 = 0,85$

Пример. Трое охотников одновременно выстрелили по медведю, который был убит одной пулей. Определить вероятность того, что медведь был убит первым стрелком, если вероятности попадания для этих стрелков равны соответственно 0,3, 0,4, 0,5. В этой задаче требуется определить вероятность гипотезы уже после того, как событие уже совершилось. Для определения искомой вероятности надо воспользоваться формулой Бейеса. В нашем случае она имеет вид: $P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)}$ В этой формуле Н1, Н2, Н3 – гипотезы, что медведя убьет первый, второй и третий стрелок соответственно. До произведения выстрелов эти гипотезы равновероятны и их вероятность равна $\frac{1}{3}$. Р(Н1/А)– вероятность того, что медведя убил первый стрелок при условии, что выстрелы уже произведены (событие А). Вероятности того, что медведя убьет первый, второй или третий стрелок, вычисленные до выстрелов, равны соответственно: $P(A/H_1) = p_1 q_2 q_3 = 0,3 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,09$ $P(A/H_2) = q_1 p_2 q_3 = 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,14$ $P(A/H_3) = q_1 q_2 p_3 = 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,21$ Здесь q1 = 0,7; q2 = 0,6; q3 = 0,5 – вероятности промаха для каждого из стрелков, рассчитаны как q = 1 – p, где p – вероятности попадания для каждого из стрелков. Подставим эти значения в формулу Бейеса: $P(H_1/A) = \frac{0,09}{0,44} = \frac{9}{44}$.

Пример. Последовательно послано четыре радиосигнала. Вероятности приема каждого из них не зависят от того, приняты ли остальные сигналы, или нет.

Вероятности приема сигналов равны соответственно 0,2, 0,3, 0,4, 0,5. Определить вероятность приема трех радиосигналов. Событие приема трех сигналов из четырех возможно в четырех случаях: $P_A = p_1 p_2 p_3 q_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}012$ $P_B = p_1 p_2 q_3 p_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}018$ $P_C = p_1 q_2 p_3 p_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}028$ $P_D = q_1 p_2 p_3 p_4 = 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}048$ Для приема трех сигналов необходимо совершение одного из событий A, B, C или D. Таким образом, находим искомую вероятность: $P = 0{,}012 + 0{,}018 + 0{,}028 + 0{,}048 = 0{,}106.$

Пример. Двадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся знает ответы только на 35 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса одного билета или на один вопрос одного билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета. В общей сложности имеется 40 вопросов (по 2 в каждом из 20 билетов). Вероятность того, что выпадает вопрос, на который ответ известен, очевидно, равна $\frac{35}{40}$. Для того, чтобы сдать экзамен, требуется совершение одного из трех событий:

1) Событие A – ответили на первый вопрос (вероятность $\frac{35}{40}$) и ответили на второй вопрос (вероятность $\frac{34}{39}$). Т.к. после успешного ответа на первый вопрос остается еще 39 вопросов, на 34 из которых ответы известны. $P(A) = \frac{35}{40} \cdot \frac{34}{39} = 0{,}7628$

2) Событие B – на первый вопрос ответили (вероятность $\frac{35}{40}$), на второй – нет (вероятность $\frac{5}{39}$), на третий – ответили (вероятность $\frac{34}{38}$). $P(B) = \frac{35}{40} \cdot \frac{5}{39} \cdot \frac{34}{38} = 0{,}1004$

3) Событие C – на первый вопрос не ответили (вероятность $\frac{5}{40}$), на второй – ответили (вероятность $\frac{35}{39}$), на третий – ответили (вероятность $\frac{34}{38}$). $P(C) = \frac{5}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{34}{38} = 0{,}1004$

Вероятность того, что при заданных условиях экзамен будет сдан равна: $P = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}9636$

Пример. Имеются две партии однородных деталей. Первая партия состоит из 12 деталей, 3 из которых - бракованные. Вторая партия состоит из 15 деталей, 4 из которых – бракованные. Из первой и второй партий извлекают по две детали. Какова вероятность того, что среди них нет бракованных деталей. Вероятность оказаться не бракованной для первой детали, извлеченной из первой партии, равна $p_1 = \frac{9}{12}$, для второй детали, извлеченной из первой партии при условии, что первая деталь была не бракованной - $p_2 = \frac{8}{11}$. Вероятность оказаться не бракованной для первой детали, извлеченной из второй партии, равна $p_3 = \frac{11}{15}$, для второй детали, извлеченной из второй партии при условии, что первая деталь была не бракованной - $p_4 = \frac{10}{14}$. Вероятность того, что среди четырех извлеченных деталей нет бракованных, равна: $P = \frac{9 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 10}{12 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 14} = 0{,}2857$

Рассмотрим тот же пример, но несколько с другим условием.

Пример. Имеются две партии однородных деталей. Первая партия состоит из 12 деталей, 3 из которых - бракованные. Вторая партия состоит из 15 деталей, 4 из которых – бракованные. Из первой партии извлекаются наугад 5 деталей, а из второй – 7 деталей. Эти детали образуют новую партию. Какова вероятность достать из них бракованную деталь? Для того, чтобы выбранная наугад деталь была бы бракованной, необходимо выполнение одного из двух несовместных условий:

1) Выбранная деталь была из первой партии (вероятность - $\frac{5}{12}$) и при этом она – бракованная (вероятность - $\frac{3}{12}$). Окончательно: $p_1 = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{12} = 0{,}1041;$

2) Выбранная деталь была из второй партии (вероятность - $\frac{7}{12}$) и при этом она – бракованная (вероятность - $\frac{4}{15}$). Окончательно: $p_2 = \frac{7}{12} \cdot \frac{4}{15} = 0{,}1556;$

Окончательно, получаем: $p = p_1 + p_2 = 0{,}2597$.

Пример. В урне 3 белых и 5 черных шаров. Из урны вынимают наугад два шара. Найти вероятность того, что эти шары не одного цвета. Событие, состоящее в том, что выбранные шары разного цвета произойдет в одном из двух случаев:

1) Первый шар белый (вероятность - $\frac{3}{8}$), а второй – черный (вероятность - $\frac{5}{7}$).

2) Первый шар черный (вероятность - $\frac{5}{8}$), а второй – белый (вероятность - $\frac{3}{7}$).

Окончательно получаем: $p = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{28}.$ Биноминальное распределение. Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с одинаковой вероятностью p в каждом из испытаний, то вероятность того, что событие не появится, равна q = 1 – p. Примем число появлений события в каждом из испытаний за некоторую случайную величину X. Чтобы найти закон распределения этой случайной величины, необходимо определить значения этой величины и их вероятности. Значения найти достаточно просто. Очевидно, что в результате п испытаний событие может не появиться вовсе, появиться один раз, два раза, три и т.д. до п раз. Вероятность каждого значения этой случайной величины можно найти по формуле Бернулли.

$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,\ldots$ Эта формула аналитически выражает искомый закон распределения. Этот закон распределения называется биноминальным.

Пример. В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения. Вероятность появления нестандартной детали в каждом случае равна 0,1. Найдем вероятности того, что среди отобранных деталей:

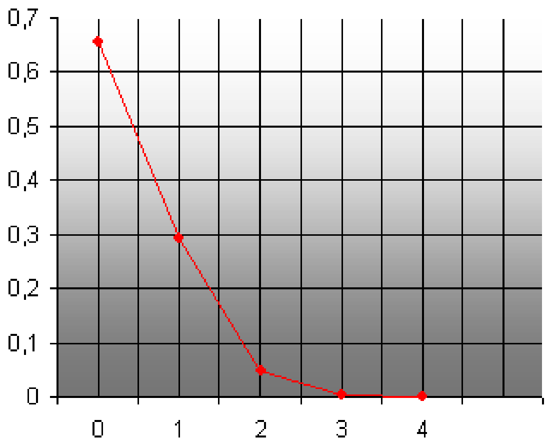
1) Вообще нет нестандартных. $P_4(0) = \frac{4!}{0!\,4!}0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}6561$

2) Одна нестандартная. $P_4(1) = \frac{4!}{1!\cdot 3!}0{,}1^1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916$

3) Две нестандартные детали. $P_4(2) = \frac{4!}{2!\cdot 2!}0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0486$

4) Три нестандартные детали. $P_4(3) = \frac{4!}{3!\cdot 1!}0{,}1^3 \cdot 0{,}9^1 = 0{,}0036$

5) Четыре нестандартных детали. $P_4(4) = \frac{4!}{4!\,0!}0{,}1^4 \cdot 0{,}9^0 = 0{,}0001$



Построим многоугольник распределения.

Пример. Две игральные кости одновременно бросают 2 раза. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях. Каждая игральная кость имеет три варианта четных очков – 2, 4 и 6 из шести возможных, таким образом, вероятность выпадения четного числа очков на одной кости равна 0,5. Вероятность одновременного выпадения четных очков на двух костях равна 0,25. Вероятность того, что при двух испытаниях оба раза выпали четные очки на обеих костях, равна: $P_2(2) = \frac{2!}{0!\,2!}0{,}25^2 \cdot 0{,}75^0 = 0{,}0625$ Вероятность того, что при двух испытаниях один раз выпали четные очки на обеих костях:

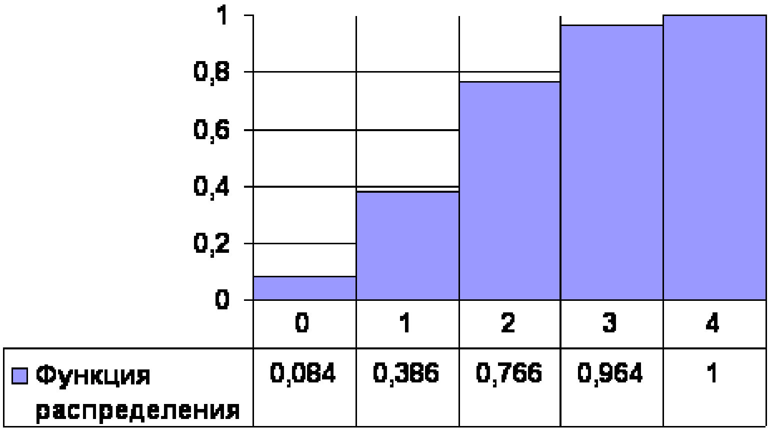
$P_2(1) = \frac{2!}{1!\cdot 1!} 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^1 = 0{,}375$ Вероятность того, что при двух испытаниях ни одного раза не выпаде четного числа очков на обеих костях: $P_2(0) = \frac{2!}{0!\cdot 2!} 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}5625$

Функция распределения

Во всех рассмотренных выше случаях случайная величина определялась путем задания значений самой величины и вероятностей этих значений. Однако, такой метод применим далеко не всегда. Например, в случае непрерывной случайной величины, ее значения могут заполнять некоторый произвольный интервал. Очевидно, что в этом случае задать все значения случайной величины просто нереально. Даже в случае, когда это сделать можно, зачастую задача решается чрезвычайно сложно. Рассмотренный только что пример даже при относительно простом условии (приборов только четыре) приводит к достаточно неудобным вычислениям, а если в задаче будет несколько сотен приборов? Поэтому встает задача по возможности отказаться от индивидуального подхода к каждой задаче и найти по возможности наиболее общий способ задания любых типов случайных величин. Пусть x – действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее x, т.е. X < x, обозначим через F(x).

Определение. Функцией распределения называют функцию F(x), определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x. $F(x) = P(X < x)$ Функцию распределения также называют интегральной функцией. Функция распределения существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Она полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения. Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид: $F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$ Знак неравенства под знаком суммы показывает, что суммирование распространяется на те возможные значения случайной величины, которые меньше аргумента x. Функция распределения дискретной случайной величины X разрывна и возрастает скачками при переходе через каждое значение x_i.

Так для примера, рассмотренного выше, функция распределения будет иметь вид:



<u>Свойства функции распределения.</u>

1) Значения функции распределения принадлежат отрезку [0, 1]. $0 \le F(x) \le 1$

2) F(x) – неубывающая функция. $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 \ge x_1$

3) Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b) , равна приращению функции распределения на этом интервале. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$

4) На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности функция распределения равна единице.

5) Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю. Таким образом, не имеет смысла говорить о каком – либо конкретном значении случайной величины. Интерес представляет только вероятность попадания случайной величины в какой – либо интервал, что соответствует большинству практических задач.

<u>Плотность распределения</u>. Функция распределения полностью характеризует случайную величину, однако, имеет один недостаток. По функции распределения трудно судить о характере распределения случайной величины в небольшой окрестности той или иной точки числовой оси.

<u>Определение.</u> Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция f(x) – первая производная от функции распределения F(x). $f(x) = F'(x)$. Плотность распределения также называют дифференциальной функцией. Для описания дискретной случайной величины плотность распределения неприемлема. Смысл плотности распределения состоит в том, что она показывает как часто появляется случайная величина X в некоторой окрестности точки x при повторении опытов. После введения функций распределения и плотности распределения можно дать следующее определение непрерывной случайной величины.

<u>Определение.</u> Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения F(x) непрерывна на всей оси OX, а плотность распределения f(x) существует везде, за исключением(может быть, конечного числа точек. Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что некоторая случайная величина X примет значение, принадлежащее заданному интервалу.

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$

Доказательство этой теоремы основано на определении плотности распределения и третьем свойстве функции распределения, записанном выше. Геометрически это означает, что вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, кривой распределения f(x) и прямыми x=a и x=b. Функция распределения может быть легко найдена, если известна плотность распределения, по формуле: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

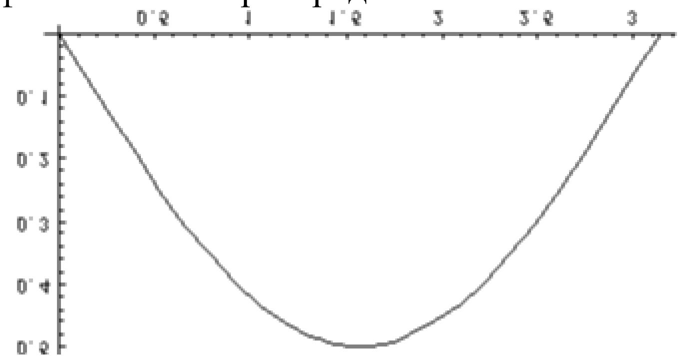
Свойства плотности распределения.

1) Плотность распределения – неотрицательная функция. $f(x) \geq 0$

2) Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от - ¥ до ¥ равен единице. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Пример. Случайная величина подчинена закону распределения с плотностью: $f(x) = \begin{cases} a\sin x, & при \quad 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & при \quad x < 0 \quad или \quad x > \pi \end{cases}$ Требуется найти коэффициент a, построить график функции плотности распределения, определить вероятность того, что случайная величина попадет в интервал от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Построим график плотности распределения:



Для нахождения коэффициента a воспользуемся свойством $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} a\sin x dx + \int_{\pi}^{\infty} 0dx = a\int_{0}^{\pi} \sin x dx = -a\cos x\Big|_{0}^{\pi} = 2a = 1; \; a = \frac{1}{2}.$$

Находим вероятность попадания случайной величины в заданный интервал.

Пример. Задана непрерывная случайная величина x своей функцией

$$f(x)=\begin{cases} A\cos 2x, & при\quad -\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4} \\ 0, & при\quad |x|>\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

распределения f(x). Требуется определить коэффициент A, найти функцию распределения, построить графики функции распределения и плотности распределения, определить вероятность того, что случайная величина x попадет в интервал $\left(\frac{\pi}{6};\,2\right)$. Найдем коэффициент A.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{-\pi/4}0dx+\int_{-\pi/4}^{\pi/4}A\cos 2xdx+\int_{\pi/4}^{\infty}0dx=\frac{A\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}=A=1.$$

Найдем функцию распределения:

1) На участке $x<-\frac{\pi}{4}$: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{x}0dx=0.$

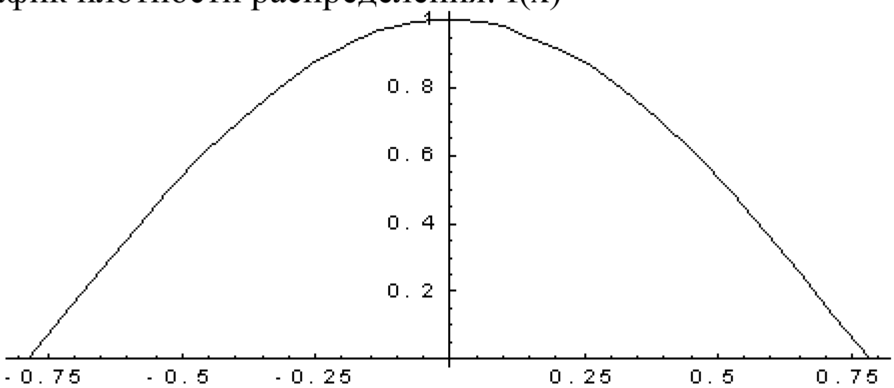
2) На участке $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$: $F(x)=\int_{-\infty}^{-\pi/4}0dx+\int_{-\pi/4}^{x}\cos 2xdx=\frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{x}=\frac{\sin 2x}{2}+\frac{1}{2}.$

3) На участке $x>\frac{\pi}{4}$: $F(x)=\int_{-\infty}^{-\pi/4}0dx+\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2xdx+\int_{\pi/4}^{x}0dx=\frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}=1.$

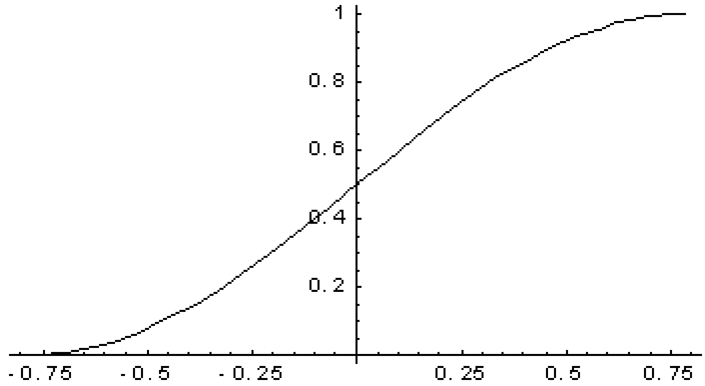
Итого:

$$f(x)=\begin{cases} \cos 2x, & при\quad -\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4} \\ 0, & при\quad |x|>\frac{\pi}{4} \end{cases};\quad F(x)=\begin{cases} 0, & при\quad x<-\frac{\pi}{4} \\ \frac{\sin 2x+1}{2}, & при\quad -\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}; \\ 1, & при\quad x>\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Построим график плотности распределения: f(x)



Построим график функции распределения:



Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(\frac{\pi}{6};\,2\right)$.

$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = \int_{\pi/6}^{2} f(x)dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos 2x dx + \int_{\pi/4}^{2} 0dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067;$

Ту же самую вероятность можно искать и другим способом: $P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = F(2) - F(\pi/6) = 1 - \frac{\sin(\pi/3)+1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067.$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Пусть непрерывная случайная величина X задана функцией распределения f(x). Допустим, что все возможные значения случайной величины принадлежат отрезку [a,b].

Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [a,b], называется определенный интеграл $M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx$ Если возможные значения случайной величины рассматриваются на всей числовой оси, то математическое ожидание находится по формуле: $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ При этом, конечно, предполагается, что несобственный интеграл сходится.

[an error occurred while processing this directive]

Определение. Дисперсией непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения. $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$ По аналогии с дисперсией дискретной случайной величины, для практического вычисления дисперсии используется формула: $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$

Определение. Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии. $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

Определение. Модой M0 дискретной случайной величины называется ее наиболее вероятное значение. Для непрерывной случайной величины мода – такое значение случайной величины, при которой плотность распределения имеет максимум. $f(M_0) = \max$. Если многоугольник распределения для дискретной случайной величины или кривая распределения для непрерывной случайной величины имеет два или несколько максимумов, то такое распределение называется двухмодальным или многомодальным. Если распределение имеет минимум, но не имеет максимума, то оно называется антимодальным.

Определение. Медианой MD случайной величины X называется такое ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины. $P(X < M_D) = P(X > M_D)$ Геометрически медиана – абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная кривой распределения делится пополам. Отметим, что если распределение одномодальное, то мода и медиана совпадают с математическим ожиданием.

Определение. Начальным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины X^k. $\alpha_k = M[X^k]$. Для дискретной случайной величины: $\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$. Для непрерывной случайной величины:

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx.$$

Начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию.

Определение. Центральным моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $(X - m_x)^k$. $\mu_k = M[(X - m_x)^k]$ Для дискретной случайной величины: $\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^k p_i$. Для непрерывной случайной величины: $\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x)dx$. Центральный момент первого порядка всегда равен нулю, а центральный момент второго порядка равен дисперсии. Центральный момент третьего порядка характеризует асимметрию распределения.

Определение. Отношение центрального момента третьего порядка к среднему квадратическому отклонению в третьей степени называется коэффициентом асимметрии. $a_x = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}$

Определение. Для характеристики островершинности и плосковершинности распределения используется величина, называемая эксцессом. $C_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3$ Кроме рассмотренных величин используются также так называемые абсолютные моменты: Абсолютный начальный момент: $\beta_k = M[|X|^k]$. Абсолютный центральный момент: $\nu_k = M[|X - m_x|^k]$. Абсолютный центральный момент первого порядка называется средним арифметическим отклонением.

Пример. Для рассмотренного выше примера определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{-\pi/4}0dx+\int_{-\pi/4}^{\pi/4}x\cos 2xdx+\int_{\pi/4}^{\infty}0dx=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}x\cos 2xdx=\left\{\begin{matrix}u=x; & dv=\cos 2xdx,\\ du=dx; & v=\frac{\sin 2x}{2};\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{x\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}-\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sin 2x}{2}dx=\frac{\cos 2x}{4}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}=0.$$

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{-\pi/4}0dx+\int_{-\pi/4}^{\pi/4}x^2\cos 2xdx+\int_{\pi/4}^{\infty}0dx=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}x^2\cos 2xdx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}u=x^2; & dv=\cos 2xdx,\\ du=2xdx, & v=\frac{\sin 2x}{2};\end{matrix}\right\}=\frac{x^2\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}-\int_{-\pi/4}^{\pi/4}x\sin 2xdx=\left\{\begin{matrix}u=x; & \sin 2xdx=dv,\\ du=dx; & v=-\frac{\cos 2x}{2};\end{matrix}\right\}=\frac{\pi^2}{16}+$$

$$+\frac{x\cos 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}-\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^2}{16}-\frac{\sin 2x}{4}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}=0{,}1163.$$

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2=0{,}1163-0=0{,}1163.$$

Пример. В урне 6 белых и 4 черных шара. Из нее пять раз подряд извлекают шар, причем каждый раз вынутый шар возвращают обратно и шары перемешивают. Приняв за случайную величину Х число извлеченных белых шаров, составить закон распределения этой величины, определить ее математическое ожидание и дисперсию. Т.к. шары в каждом опыте возвращаются обратно и перемешиваются, то испытания можно считать независимыми (результат предыдущего опыта не влияет на вероятность появления или не появления события в другом опыте). Таким образом, вероятность появления белого шара в каждом опыте постоянна и равна $P_Б=\frac{6}{10}=0{,}6.$ Таким образом, в результате пяти последовательных испытаний белый шар может не появиться вовсе, появиться один раз, два, три, четыре или пять раз. Для составления закона распределения надо найти вероятности каждого из этих событий:

1) Белый шар не появился вовсе: $P_Б(0)=(1-P_Б)^5=0{,}0102.$

2) Белый шар появился один раз: $P_Б(1)=C_5^1P_Б^1(1-P_Б)^4=\frac{5!}{1!\,4!}0{,}6\cdot 0{,}4^4=0{,}0768$

3) Белый шар появиться два раза: $P_Б(2)=\frac{5!}{2!\,3!}0{,}6^2\cdot 0{,}4^3=0{,}2304$.

4) Белый шар появиться три раза: $P_Б(3)=\frac{5!}{3!\,2!}0{,}6^3\cdot 0{,}4^2=0{,}3456.$

5) Белый шар появиться четыре раза: $P_Б(4)=\frac{5!}{4!\,1!}0{,}6^4\cdot 0{,}4^1=0{,}2592.$

6) Белый шар появился пять раз: $P_Б(5)=0{,}6^5=0{,}0778.$ Получаем следующий закон распределения случайной величины Х.

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
p(x)	0,0102	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,0778

$M(X) = 0{,}0768 + 2 \cdot 0{,}2304 + 3 \cdot 0{,}3456 + 4 \cdot 0{,}2592 + 5 \cdot 0{,}0778 = 3{,}0002.$

$M(X^2) = 0{,}0768 + 4 \cdot 0{,}2304 + 9 \cdot 0{,}3456 + 16 \cdot 0{,}2592 + 25 \cdot 0{,}0778 = 10{,}201.$

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 10{,}201 - 9{,}0012 = 1{,}1998.$

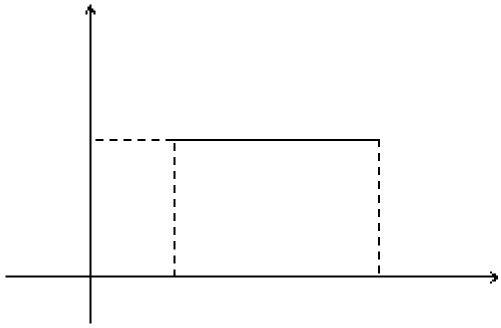
При решении практических задач зачастую точно найти закон распределения случайной величины довольно сложно. Однако, все происходящие процессы, связанные со случайными величинами, можно разделить на несколько типов, каждому из которых можно поставить в соответствие какой – либо закон распределения. Выше были рассмотрены некоторые типы распределений дискретной случайной величины такие как биноминальное распределение и распределение Пуассона. Рассмотрим теперь некоторые типы законов распределения для непрерывной случайной величины.

Равномерное распределение.

Определение. Непрерывная случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке [a, b], если на этом отрезке плотность распределения случайной величины постоянна, а вне его равна нулю.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ C, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}$$

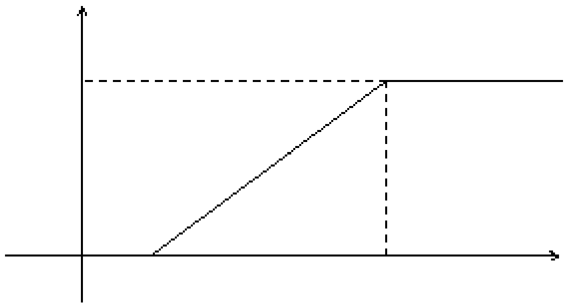
Постоянная величина С может быть определена из условия равенства единице площади, ограниченной кривой распределения.



f(x) $C = \dfrac{1}{b-a}$ 0 a b x Получаем $C = \dfrac{1}{b-a}$. Найдем функцию распределения F(x) на отрезке [a,b].

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dx = \left.\frac{x}{b-a}\right|_{a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & при \quad a \le x \le b \\ 1, & при \quad x > b \end{cases}$$



F(x)

1 0 a b x Для того, чтобы случайная величина подчинялась закону равномерного распределения необходимо, чтобы ее значения лежали внутри некоторого определенного интервала, и внутри этого интервала значения этой случайной величины были бы равновероятны. Определим математическое ожидание и

дисперсию случайной величины, подчиненной равномерному закону распределения. $m_x = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}$.

$$m_{x^2} = \int_a^b x^2 f(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

$$D_x = m_{x^2} - m_x^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.\ \sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

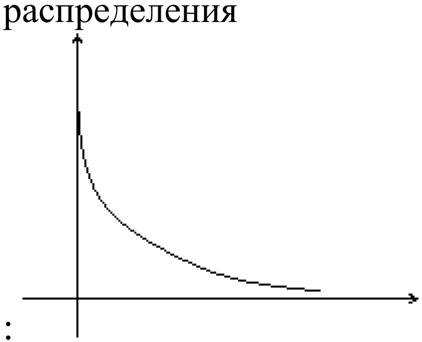
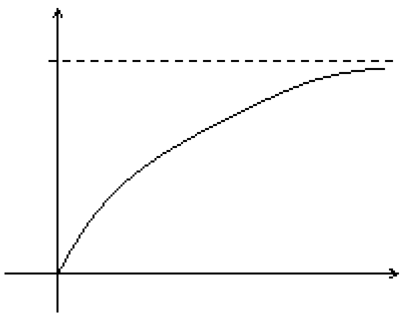
Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал: $P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$.

Показательное распределение.

Определение. Показательным (экспоненциальным) называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & при \quad x \ge 0 \end{cases}$ где 1 - положительное число.

Найдем закон распределения. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^0 0dx + \lambda\int_0^x e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda x}$.

$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & при \quad x \ge 0 \end{cases}$ Графики функции распределения и плотности распределения

:


f(x) F(x) l 1 0 x 0 x

Найдем математическое ожидание случайной величины, подчиненной показательному распределению.

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \begin{Bmatrix} u = x; & e^{-\lambda x}dx = dv; \\ du = dx; & -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} = v; \end{Bmatrix} = \lambda\left(-\frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}dx\right) =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Результат получен с использованием того факта, что $xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}} - 0 = \begin{Bmatrix} По & правилу \\ Лопиталя & \end{Bmatrix} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{-\lambda e^{\lambda x}} = 0.$

Для нахождения дисперсии найдем величину $M(X^2)$. $M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x}dx$

Дважды интегрируя по частям, аналогично рассмотренному случаю, получим: $M(X^2) = \frac{2}{\lambda^2};$ Тогда $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$

Итого: $M(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma_x = \frac{1}{\lambda}.$

Видно, что в случае показательного распределения математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение равны. Также легко определить и вероятность попадания случайной величины, подчиненной показательному закону распределения, в заданный интервал. $P(a < x < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$ Показательное распределение широко используется в теории надежности. Допустим, некоторое устройство начинает работать в момент времени t0=0, а через какое – то время t происходит отказ устройства. Обозначим T непрерывную случайную величину – длительность безотказной работы устройства. Таким образом, функция распределения F(t) = P(T<t) определяет вероятность отказа за время длительностью t. Вероятность противоположного события (безотказная работа в течение времени t) равна R(t) = P(T>t) = 1 – F(t).

<u>Определение.</u> Функцией надежности R(t) называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы устройства в течение времени t. Часто на практике длительность безотказной работы подчиняется показательному закону распределению. Вообще говоря, если рассматривать новое устройство, то вероятность отказа в начале его функционирования будет больше, затем количество отказов снизится и будет некоторое время иметь практически одно и то же значение. Затем (когда устройство выработает свой ресурс) количество отказов будет возрастать. Другими словами, можно сказать, что функционирование устройства на протяжении всего существования (в смысле количества отказов) можно описать комбинацией двух показательных законов (в начале и конце функционирования) и равномерного закона распределения. Функция надежности для какого- либо устройства при показательном законе распределения равна: $R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}.$ Данное соотношение называют показательным законом надежности. Важным свойством, позволяющим значительно упростить решение задач теории надежности, является то, что вероятность безотказной работы устройства на интервале времени t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности времени t. Таким образом, безотказная работа устройства зависит только от интенсивности отказов l и не зависит от безотказной работы устройства в прошлом. Так как подобным свойством обладает только показательный закон распределения, то этот факт позволяет определить, является ли закон распределения случайной величины показательным или нет.

<u>Нормальный закон распределения.</u>

<u>Определение.</u> Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности $f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}};$ Нормальный закон распределения также называется законом

Гаусса. Нормальный закон распределения занимает центральное место в теории вероятностей. Это обусловлено тем, что этот закон проявляется во всех случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов. К нормальному закону приближаются все остальные законы распределения. Можно легко показать, что параметры m_x и σ_x, входящие в плотность распределения являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины Х. Найдем функцию распределения F(x). $F(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx$ График плотности нормального распределения называется нормальной кривой или кривой Гаусса. Нормальная кривая обладает следующими свойствами:

1) Функция определена на всей числовой оси.

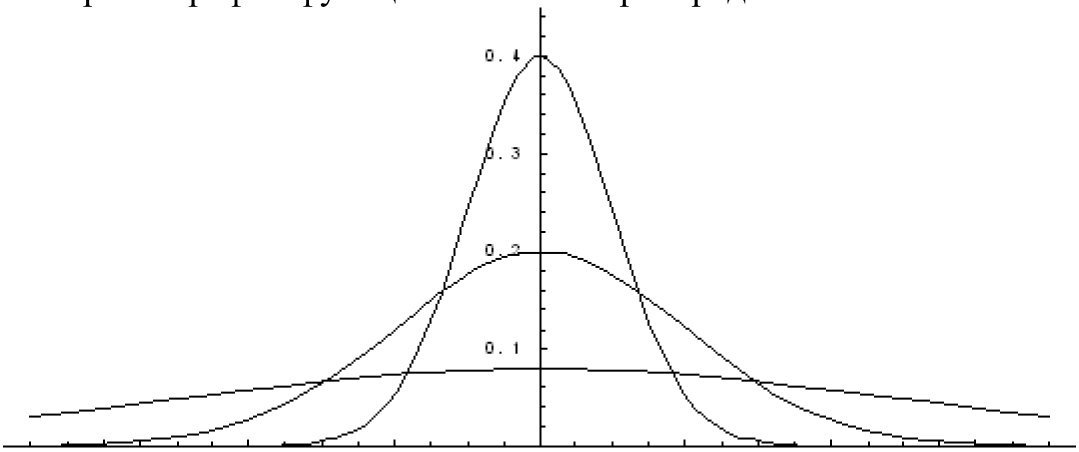
2) При всех х функция распределения принимает только положительные значения.

3) Ось ОХ является горизонтальной асимптотой графика плотности вероятности, т.к. при неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента х, значение функции стремится к нулю.

4) Найдем экстремум функции. $y' = -\frac{x-m}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = 0; \qquad x = m;$ Т.к. при y' > 0 при x < m и y' < 0 при x > m , то в точке х = т функция имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

5) Функция является симметричной относительно прямой х = а, т.к. разность (х – а) входит в функцию плотности распределения в квадрате.

6) Для нахождения точек перегиба графика найдем вторую производную функции плотности. $y'' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\left[1-\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right]$ При x = m + s и x = m - s вторая производная равна нулю, а при переходе через эти точки меняет знак, т.е. в этих точках функция имеет перегиб. В этих точках значение функции равно $\frac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}}$. Построим график функции плотности распределения.



Построены графики при т =0 и трех возможных значениях среднего квадратичного отклонения s = 1, s = 2 и s = 7. Как видно, при увеличении значения среднего квадратичного отклонения график становится более пологим, а максимальное значение уменьшается.. Если a > 0, то график сместится в положительном направлении, если a < 0 – в отрицательном. При a = 0 и s = 1 кривая называется нормированной. Уравнение нормированной кривой: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2

ЗАДАНИЕ №1. Вероятность события. Теоремы сложения и умножения событий.

1 Вариант. В лотерее 10 билетов, из которых 4 выигрышных. Какова вероятность выиграть хотя бы один раз, купив 3 билета?

2 Вариант. У шести животных имеется заболевание, причем вероятность выздоровления равна 0,98. Какова вероятность того, что:

а) выздоровят все шестеро животных,

б) выздоровят четверо?

3 Вариант. В магазине работают 2 мужчин и 7 женщин. Трое из них должны пойти в отпуск летом. Кто именно – определяется жребием. Найти вероятность того, что летом в отпуск пойдет хотя бы один мужчина.

4 Вариант. Среди 10 документов, поступивших в офис, два оформлены с ошибками. Для проверки наудачу взяли 4 документа. Какова вероятность того, что среди них окажется:

а) хотя бы один неверно оформленный документ,

б) только один неверно оформленный документ.

5 Вариант. Рабочий обслуживает 3 станка, каждый из которых работает независимо друг от друга. Вероятность того, что станки потребуют ремонта равна соответственно: 0,4; 0,3; 0,2. Найти вероятность того, что придется ремонтировать все станки.

6 Вариант. Среди 15 счетов 3 счета оформлены неверно. Ревизор наудачу берет 5 счетов. Найти вероятность того, что среди взятых счетов:

а) два оформлены неверно,

б) все оформлены верно.

7 Вариант. В пачке 10 тетрадей, среди них 4 тетради в клетку, а остальные в линейку. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых трех тетрадей хотя бы одна будет в клетку.

8 Вариант. Из 20 методичек по математике 3 по теории вероятностей. Студент наудачу взял две методички.

Найти вероятность того, что среди взятых:

а) нет методичек по теории вероятностей,

б) есть одна методичка по теории вероятностей.

9 Вариант. Из трех бухгалтеров, восьми менеджеров и шести научных работников необходимо сформировать комитет из 10 человек. Найти вероятность того, что в комитете окажутся: один бухгалтер, пять менеджеров и четыре научных работника.

10 Вариант. В урне лежат 5 красных, 7 синих и 11 белых шаров. Какова вероятность, что вынутый шар окажется не белым?

ЗАДАНИЕ № 2. Теорема полной вероятности события.

1 Вариант. Первый рабочий изготовил 40 деталей. Из которых 40 деталей, из которых 4 бракованных. Второй рабочий изготовил 30 таких же деталей, из которых 2 бракованных. Все изготовленные детали положены в одну тару и доставлены в ОТК. Найти вероятность того, что деталь, взятая на удачу контролером ОТК, соответствует ГОСТу.

2 Вариант. Сборщик получил 3 ящика деталей: в первом ящике 40 деталей, из них 20 окрашенных; во втором– 50, из них 10 окрашенных; в третьем – 30 деталей, из них 15 окрашенных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика окажется окрашенной.

3 Вариант. На трех пресс-формах изготавливают детали, причем на первой вырабатывается 50% всех деталей; на второй 30% и на третьей – 20%. При этом вероятность появления брака с первой пресс-формы составляет 0,05; со второй – 0,08; с третьей – 0,1. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь, из числа изготовленных, соответствует стандарту.

4 Вариант. Радиолампа поступает с одного из двух заводов с вероятностью 0,4 и 0,6 соответственно. Вероятность бесперебойной работы лампы составляет: для лампы первого завода – 0,1; второго завода – 0,2. Найти вероятность того, что лампа работает бесперебойно.

5 Вариант. Фирма имеет три источника поставки комплектующих – фирмы A, B, C. На долю фирмы A приходится 50% общего объема поставок, B – 30% и C – 20%. Известно, что 10% поставляемых фирмой A

деталей бракованные, фирмой В – 5% и фирмой С – 6%. Какова вероятность, что взятая наугад деталь будет бракованной?

6 Вариант. Две литейные машины изготавливают по 250 однотипных отливок в смену, которые хранятся в одном месте. Для первой машины брак составляет 3%, а для второй – 2%. Найти вероятность того, что на удачу взятая отливка будет годной.

7 Вариант. На сборку поступают детали из трёх заготовительных цехов. Известно, что первый цех даёт 3% брака, второй -2%, третий-1%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если каждый цех поставляет, соответственно, 500, 200 и 300 деталей.

8 Вариант. На складе хранятся 800 изделий завода №1 и 1200 изделий завода №2. Среди изделий завода №1 в среднем 95% высшего качества, а среди изделий завода №2 – 80%. Чему равна вероятность того, что первое принесённое со склада окажется низкого качества.

9 Вариант. Трое рабочих за смену изготовили 60 деталей. Производительность рабочих относится как 1:2:3. Первый рабочий изготавливает в среднем 95% годных деталей, второй 85% и третий - 90%. Найти вероятность того, что наудачу взятая из числа изготовленных за смену деталь низкого качества.

10 Вариант. Среди 100 деталей, изготовленных цехом №1, 85 деталей проходит закалку. Из числа 120 таких же деталей, изготовленных цехом №2, закалку проходят 95 деталей. Все эти детали поступают на сборку. Чему равна вероятность того, что наудачу взятая сборщиком деталь, прошла предварительную закалку?

ЗАДАНИЕ №3. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Формула Пуассона. Формула Муавра-Лапласа.

1 Вариант. Вероятность малому предприятию быть банкротом равна 0,2. Найти вероятность того, что из восьми малых предприятий сохранятся:

а) два,

б) более двух.

2 Вариант. На факультете насчитывается 1825 студентов. Найти вероятность того, что 1 сентября является днем рождения четырех студентов.

3 Вариант. В среднем 20% пакетов акций продаются на аукционе по первоначально заявленной цене. Найти вероятность того, что из 9 пакетов акций по первоначальной цене будет продано:

а) менее 2 пакетов,

б) хотя бы один пакет.

4 Вариант. В поселке из каждых 100 семей 80 имеют холодильники. Найти вероятность того, что из 400, 300 имеют холодильники.

5 Вариант. Завод отправил на базу 10000 стандартных изделий. Среднее число поврежденных при транспортировке изделий составляет 0,02%. Найти вероятность того, что из 10000 изделий будет повреждено:

а) 3,

б) менее трех.

6 Вариант. Предполагается, что 10%новых малых предприятий прекращают деятельность в течение года. Найти вероятность того, что из 6 предприятий 2прекратят деятельность.

7 Вариант. В среднем по 15% договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из 10 договоров с наступлением страхового случая страховая сумма будет выплачена по:

а) трем договорам,

б) менее двум договорам.

8 Вариант. Контрольную работу по математике успешно выполняют 70 % студентов. Найти вероятность того, что из 400 студентов работу выполнят 180.

9 Вариант. Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что в учебнике есть опечатки равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит:

а) 5 бракованных книг,

б) менее двух бракованных книг.

10 Вариант. При проверке установлено, что пятая часть банков имеет уставной фонд свыше 100 млн.руб. Найти вероятность того, что среди 1800 банков такой уставной фонд имеют:

а) не менее 300,

б) от 300 до 400.

ЗАДАНИЕ №4. Закон распределения вероятностей случайных дискретных величин. Числовые характеристики дискретных случайных величин. Функция распределения вероятностей случайной величины.

1 Вариант. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8. Записать закон распределение X – числа попаданий в цель при 4 выстрелах. Составить функцию распределения случайной величины F(x). Вычислить M(X), Д(X), $\sigma_{x.}$

2 Вариант. По заданному закону распределения дискретной случайной

x_1	1	4	5	7	8
p_1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2

величины X:

Составить функцию распределения F(x) и изобразить ее график. Вычислить M(X), Д(X), $\sigma_{x.}$

3 Вариант. Вероятность того, что в библиотеке необходимая студенту книга свободна, равна 0,3. Записать закон распределение X – количества библиотек, которые посетит студент, если в городе 4 библиотеки. Составить функцию распределения случайной величины F(x). Вычислить M(X), Д(X), $\sigma_{x.}$

4 Вариант. По заданному закону распределения дискретной случайной величины X:

x_1	1	4	5	7	8
p_1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2

Составить функцию распределения F(x) и изобразить ее график. Вычислить M(X), Д(X), $\sigma_{x.}$

5 Вариант. Студенту задается 3 вопроса. Вероятность ответа на каждый из них составляет 0,9. Записать закон распределение X – числа ответов студента. Составить функцию распределения случайной величины F(x). Вычислить M(X), Д(X), $\sigma_{x.}$

6 Вариант. По заданному закону распределения дискретной случайной величины X:

x_1	4	5	6	7	8
p_1	0,1	0,3	0,1	0,2	0,3

Составить функцию распределения F(x) и изобразить ее график. Вычислить M(X), Д(X), $\sigma_{x.}$

7 Вариант. Клиенты банка не возвращают кредиты с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа X возвращенных кредитов из 4 выданных. Составить функцию распределения случайной величины F(x). Вычислить M(X), Д(X), σ_x.

8 Вариант. По заданному закону распределения дискретной случайной величины X:

x_1	0	1	2	3	4
p_1	0,2	0,2	0,1	0,2	0,3

Составить функцию распределения F(x) и изобразить ее график. Вычислить M(X), Д(X), σ_x.

9 Вариант. Из урны, содержащей 3 белых и 4 черных шара, вынимают на удачу 3 шара. Найти закон распределения X – числа вынутых черных шаров. Составить функцию распределения случайной величины F(x). Вычислить M(X), Д(X), σ_x.

10 Вариант. По заданному закону распределения дискретной случайной

x_1	4	5	6	7
p_1	$^{7}/_{36}$	$^{89}/_{180}$	$^{5}/_{18}$	$^{1}/_{30}$

величины X:

Составить функцию распределения F(x) и изобразить ее график. Вычислить M(X), Д(X), σ_x.

ЗАДАНИЕ №5 Статистическое распределение. Геометрическое изображение. Выборочные характеристики статистического распределения.

По данному статистическому распределению выборки вычислить:

а) выборочную среднюю,

б) выборочную дисперсию,

с) выборочное среднее квадратическое отклонение.

Построить полигон частот или гистограмму.

1 Вариант.

x_i	110	115	120	125	130	135	140
n_i	3	7	11	40	19	12	8

2 Вариант

x_i	120	130	140	150	160	170	180
n_i	6	9	29	26	14	11	5

3 Вариант

x_i	10,3	11,0	11,7	12,4	13,1	13,8	14,5
n_i	7	10	60	13	5	3	2

4 Вариант

x_i	11,5	12,0	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5
n_i	5	13	40	26	7	5	4

5 Вариант

x_i	42	50	58	66	74	82	90
n_i	4	17	55	12	7	3	2

6 Вариант

x_i	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250	250-260
n_i	2	4	7	8	6	3

7 Вариант

x_i	190-200	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250
n_i	5	2	4	8	6	5

8 Вариант

x_i	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18
n_i	6	12	17	10	4	1

9 Вариант

x_i	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18
n_i	1	1	5	9	14	20

10 Вариант

x_i	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
n_i	3	8	16	20	20	3

ЗАДАНИЕ №6 Нормальное распределение. Доверительные интервалы.

Найти доверительные интервалы для оценки математического ожидания M (X) нормального распределения с надежностью Υ, зная выборочную среднюю $\overline{X_B}$, объем выборки n и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

1 Вариант. $\overline{X_B}=12{,}0$; $\sigma(X)=1{,}5$; $n=50$; $\Upsilon=0{,}95$.

2 Вариант. $\overline{X_B}=20{,}1$; $\sigma(X)=6$; $n=64$; $\Upsilon=0{,}99$.

3 Вариант. $\overline{X_B}=12{,}0$; $\sigma(X)=1{,}5$; $n=50$; $\Upsilon=0{,}995$.

4 Вариант. $\overline{X_B}=70{,}6$; $\sigma(X)=8$; $n=121$; $\Upsilon=0{,}95$.

5 Вариант. $\overline{X_B}=50{,}2$; $\sigma(X)=4$; $n=49$; $\Upsilon=0{,}95$.

6 Вариант. $\overline{X_B}$=65,5; σ(X)=7; n=100; ϒ=0,95.

7 Вариант. $\overline{X_B}$=60,4; σ(X)=6; n=81; ϒ=0,95.

8 Вариант. $\overline{X_B}$=91,0; σ(X)=12; n=225; ϒ=0,95.

9 Вариант. $\overline{X_B}$=80,8; σ(X)=10; n=150; ϒ=0,95.

10 Вариант. $\overline{X_B}$=7507; σ(X)=9; n=144; ϒ=0,95.

ЗАДАНИЕ №7. Корреляционная зависимость.

Дана корреляционная таблица. Используя метод наименьших квадратов, найти:

а) выборочный коэффициент корреляции,

б) выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X, построить график.

1 Вариант

Y	***X***						n_y
	15	20	25	30	35	40	
25	3	4	-	-	-	-	7
35	-	6	3	-	-	-	9
45	-	-	6	35	2	-	43
55	-	-	12	8	6	-	26
65	-	-	-	4	7	4	15
n_x	3	10	21	47	15	4	**n** =100

2 Вариант

Y	***X***						n_y
	2	7	12	17	22	27	
110	1	5	-	-	-	-	6
120	-	5	3	-	-	-	8
130	-	-	3	40	12	-	55
140	-	-	2	10	5	-	17
150	-	-	-	3	4	7	14
n_x	1	10	8	53	21	7	**n** =100

3 Вариант

Y	***X***						n_y
	5	10	15	20	25	30	
10	3	5	-	-	-	-	8
20	-	4	4	-	-	-	8
30	-	-	7	35	8	-	50
40	-	-	2	10	8	-	20
50	-	-	-	5	6	3	14
n_x	3	9	13	50	22	3	**n** =100

4 Вариант

Y	*X*						n_y
	10	15	20	25	30	35	
20	5	1	-	-	-	-	6
30	-	6	2	-	-	-	8
40	-	-	5	40	5	-	50
50	-	-	2	8	7	-	17
60	-	-	-	4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	**n** =100

5 Вариант

Y	*X*						n_y
	4	9	14	19	24	29	
30	3	3	-	-	-	-	6
40	-	5	4	-	-	-	9
50	-	-	2	40	8	-	50
60	-	-	5	10	6	-	21
70	-	-	-	4	7	3	14
n_x	3	8	11	54	21	3	**n** =100

6 Вариант

Y	*X*						n_y
	5	10	15	20	25	30	
45	2	4	-	-	-	-	6
55	-	3	5	-	-	-	8
65	-	-	5	35	5	-	45
75	-	-	2	8	17	-	27
85	-	-	-	4	7	3	14
n_x	2	7	12	47	29	3	**n** =100

7 Вариант

Y	*X*						n_y
	10	15	20	25	30	35	
40	2	4	-	-	-	-	6
50	-	3	7	-	-	-	10
60	-	-	5	30	10	-	45
70	-	-	7	10	8	-	25
80	-	-	-	5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	**n** =100

8 Вариант

Y	*X*						n_y
	15	20	25	30	35	40	
15	4	1	-	-	-	-	5
25	-	6	4	-	-	-	10
35	-	-	2	50	2	-	54
45	-	-	1	9	7	-	17
55	-	-	-	4	3	7	14

n_x	4	7	7	63	12	7	**n** =100

9 Вариант

Y	***X***						n_y
	5	10	15	20	25	30	
30	2	6	-	-	-	-	8
40	-	5	3	-	-	-	8
50	-	-	7	40	2	-	49
60	-	-	4	9	6	-	19
70	-	-	-	4	7	5	16
n_x	2	11	14	53	15	5	**n** =100

10 Вариант

Y	***X***						n_y
	12	17	22	27	32	37	
25	2	4	-	-	-	-	6
35	-	6	3	-	-	-	9
45	-	-	6	35	4	-	45
55	-	-	2	8	6	-	16
65	-	-	-	14	7	3	24
n_x	2	10	11	57	17	3	**n** =100

Задача №1.

Задание 1. Сформулировать математическую модель исходной задачи.

Задание 2. Решить полученную задачу линейного программирования симплексным методом.

Задание 3. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальное решение, используя теоремы двойственности.

Вариант 1.

Фирма производит два вида изделия А и Б, рынок сбыта которых неограничен. Каждое изделие должно пройти обработку на каждой из машин 1, 2 и 3. Время обработки (в часах) для каждого из изделий А на машинах 1, 2 и 3 составляет 0,5 ч., 0,4ч. и 0,2 ч. соответственно, а для каждого из изделий Б время обработки на этих машинах равно соответственно 0,25 ч., 0,3 ч. и 0,4 ч.

Ресурсы времени работы машин 1, 2 и 3 типов составляют 40; 36 и 36 часов в неделю соответственно; прибыль от изделий А и Б равна соответственно 5 и 3 ден. Единиц за одно изделие. Определить недельный план выпуска изделий А и Б, максимизирующий прибыль.

Вариант 2.

Предприятие производит полки для ванных комнат двух размеров А и Б. Служба маркетинга определила, что на рынке может быть реализовано до 550 полок в неделю, а объем поставляемого на предприятие материала, из которого делаются полки, равен 1200 м^2 в неделю. Для каждой полки типов А и Б требуется 2 м^2 и 3м^2 материала соответственно, а затраты станочного времени на обработку одной полки типа А и Б составляют соответственно 12 и 30 минут. Общий недельный объем станочного времени равен 160 часов, а прибыль от продажи каждой полки типов А и Б составляет 3 и 4 ден. Единиц соответственно. Определить сколько полок каждого типа следует выпускать в неделю для получения наибольшей прибыли.

Вариант 3.

Из 505 м^2 ткани нужно сшить не более 150 женских и не более 100 детских платьев. На пошив одного женского и детского платья требуется соответственно 3 м^2 и 1м^2 ткани. При реализации каждого женского платья получают 10 ден единиц прибыли, а детского – 5 ден. Единиц. Сколько нужно сшить женских и детских платьев, чтобы получить наибольшую прибыль?

Вариант 4.

При подкормке посевов нужно внести на 1 га почвы не менее 8 единиц химического вещества А, 21 единиц химического вещества Б и 16 единиц химического вещества В. Агрофирма закупает комбинированные удобрения двух видов: М и К; содержание в единице веса удобрений единиц веществ А, Б и В составляет для удобрения М 1,2 и 4, а для удобрения К 5, 3 и 4 соответственно. Цена единицы веса удобрения М равна 5, а удобрения К – 3 ден единиц. Составить наиболее экономичный план закупки удобрений в расчете на 1 га почвы.

Вариант 5.

Для выпуска продукции типа А и Б используется сырье видов 1, 2, 3 и 4. Расход сырья каждого вида на единицу продукции А составляет 2, 1, 2, и 1 единиц соответственно, а на единицу продукции Б – 3, 1, 1, и 0 единиц. Запасы сырья по видам составляют соответственно 21, 8, 12 и 5 единиц, а прибыль в расчете на единицу продукции по продукции А равна 3 ден. единиц, а по продукции Б – 2 ден. единиц. Составить план выпуска продукции, обеспечивающей максимальную прибыль.

Вариант 6.

Предприятие имеет три группы станков, объемы загрузки которых ограниченны и составляют соответственно 30, 24 и 3 станко-часов. Производительность каждой группы станков по двум типам деталей А и Б составляет по деталям А 10, 15 и 20 деталей в час, а по деталям Б – 20, 40 и 60 деталей в час. Найти время загрузки каждой группы станков, чтобы получить максимальное общее количество деталей обоих типов, и соответствующее число каждого типа.

Вариант 7.

Можно закупить корм видов 1 и 2 , при этом стоимость единиц корма вида 1 равна 2 ден. единицам, а вида 2 – 4 ден. единицы. В каждой единице корма 1 содержится одна единица витамина А две единицы витамина В и нет витамина С, а в каждой единице корма 2 – две единицы А, одна единица В и одна единица С. Животному в сутки необходимо не менее 10 единиц витамина А, 10 единиц витамина В и 4 единицы витамина С. Составить наиболее дешевый рацион питания животного в расчете на сутки.

Вариант 8.

На двух станках типов 1 и 2 производится два вида продукции А и Б при этом для изготовления единицы продукции А станок типа 1 используется два часа, а станок типа 2 – один час, тогда как по продукции Б соответствующее значение составляет 1 час и 2 часа. В течение суток станок типа 1 может работать не более 10 часов, а станок типа 2 – не более 8 часов. Составить суточный план выпуска продукции А и Б, обеспечивающий наибольшую прибыль, если прибыль от реализации единицы продукции А составляет 5 ден. единиц, а от единицы продукции Б – 2 ден. единиц, и при этом предприятие зп каждый час простоя станка типа 1 несет убытки в 2 ден. единицы, а станка типа 2 – 1 ден. единиц.

Вариант 9.

В мастерской освоили производство столов и тумбочек для торговой сети из древесины видов 1 и 2. Имеется 72 м^3 древесины вида 1 и 56 м^3 древесины вида 2, при этом на производство одного стола требуется 0,18 м^3 древесины вида 1 и 0,08 м^3 древесины вида 2, а производство одной тумбочки уходит соответственно 0,09 м^3 и 0,28 м^3 видов древесины 1 и 2 . От производства одного стола мастерская получает прибыль в размере 1,1 ден. единиц, а одной тумбочки 0,7 ден. единиц. Сколько столов и тумбочек должна изготовить мастерская из имеющегося материала, чтобы получить наибольшую прибыль?

Вариант 10.

Имеется 150 л жидкости А и 150 л жидкости Б. Для получения одной бутылки смеси 1 нужно взять 2л жидкости А и 1л жидкости Б, а для получения одной бутылки смеси 2 нужно взять соответственно 1 л жидкости А и 4 – жидкости Б. смесь 1 продается по цене 2 ден.единицы, а смесь 2 – 3 ден. единицы за одну бутыль. Сколько нужно приготовить бутылей каждой смеси, чтобы общая их стоимость была наибольшей, при условии, что число бутылей со смесью 2 не менее числа бутылей со смесью 1?

Задача №2.

Задание 1. Записать исходные данные задачи в виде транспортной таблицы, определить, открытой или закрытой является транспортная задача.

Задача 2. Сформулировать математическую модель исходной транспортной задачи.

Задача 3. Найти оптимальный план перевозок, отметив при этом единственность или не единственность оптимального плана.

Вариант 1.

На строительном полигоне имеются три кирпичных завода, суточные объемы производства которых соответственно раны 450 т, 350 т и 500т кирпича. Эти заводы поставляют кирпич на четыре строительных объекта, потребности в кирпиче которых в сутки составляют 300 т, 500 т, 350 т и 350 т соответственно. Стоимости перевозки одной тонны кирпича с первого завода на все объекты равны соответственно 1, 7, 5 и 2 ден. единиц; аналогичные стоимости перевозки со второго завода составляют 3, 1, 6 и 3 ден. единиц., а с третьего – 4, 3, 2 и 6 ден. единиц.

Составить оптимальный план перевозок кирпича с заводов на объекты, обеспечивающий минимальные затраты.

Вариант 2.

На складах А, В, С и Д находятся соответственно 50 т, 40т, 40 ти 70 т муки, которую нужно доставит четырем хлебозаводам. Первому хлебозаводу требуется 50т муки, второму – 40т, третьему – 50т и четвертому – 60т муки. Стоимости доставки одной тонны муки со склада А каждому хлебозаводу соответственно равны 8, 3, 5 и 2 ден. единиц, со склада В – 7, 4, 9 и 8 ден. единиц, со склада С – 6, 3, 3 и 1 ден. единиц, со склада Д – 2, 4, 1 и 5 ден. единиц. Составить план перевозки муки, обеспечивающий минимальные транспортные расходы.

Вариант 3.

Картофель из четырех районов должен быть перевезен в три хранилища. Запасы картофеля в районах соответственно равны 400т, 500т, 800т и 500т. Возможности хранилищ соответственно равны 700т, 800т и 700т. Затраты на перевозку одной тонны картофеля из первого района в каждое хранилище равны соответственно 1, 4 и 3 ден. единиц; аналогичные затраты на перевозку из второго района составляют 7, 1 и 5 ден единиц, из третьего – 4, 8 и 3 ден. единиц, из четвертого – 6, 2 и 8 ден. единиц. Найти план перевозки картофеля из районов в хранилища, при котором транспортные расходы были бы минимальными.

Вариант 4.

На четырех складах фирмы находится 70, 30, 40 и 60 холодильников соответственно, которые следует доставить в четыре магазина фирмы в количестве 50, 70, 40 и 40 холодильников в каждый из магазинов.

Стоимости перевозки одного холодильника с первого склада в каждый из магазинов составляют 6, 4, 9 и 7 ден. единиц соответственно, со второго склада – 7, 2, 5 и 6 ден. единиц, с третьего склада – 2, 6, 3 и 3 ден. единиц, с четвертого склада – 3, 3, 6 и 5 ден. единиц соответственно. Определить план перевозок холодильников со складов в магазины, при котором общие затраты на перевозку были бы наименьшими.

Вариант 5.

Фирма на своих филиалах производит химические удобрения. На четырех складах фирмы хранится соответственно 20т, 70т, 110т и 140 т необходимого сырья, а потребности в сырье трех филиалов фирмы составляют 130т, 80т и 80т сырья соответственно. Затраты на перевозку одной тонны сырья с первого склада на каждый из филиалов равны 3, 4 и 7 ден. единиц; соответствующие затраты для второго склада равны 1, 5 и 3 ден. единиц, для третьего склада – 7, 3 и 2 ден. единиц, а для четвертого склада - 4, 6 и 6 ден. единиц соответственно. Составить оптимальный план перевозок сырья со складов на филиалы, при котором транспортные затраты были бы минимальными.

Вариант 6.

Сталеплавильная компания располагает тремя заводами M_1, M_2, M_3, производящими за некоторый период времени 50, 30 и 20 тыс. тонн стали. Свою продукцию компания поставляет четырем потребителям C_1, C_2, C_3 и C_4, потребности которых за тот же период времени составляют 12, 15, 25 и 36 тыс. тонн. Стоимости перевозки одной тыс. тонн стали с завода M_1 потребителям C_1, C_2, C_3 и C_4 равны 15, 19, 19 и 15 ден. единиц соответственно; аналогичные стоимости перевозок с завода M_2 равны 19, 18, 18 и 10 ден. единиц, а с завода M_3 – 14, 16, 20 и 18 ден. единиц. Определить оптимальный план перевозок, при котором общие затраты на перевозки являются минимальными.

Вариант 7.

Компания владеет тремя фабриками M_1, M_2, M_3 способными произвести еженедельно 50, 25 и 25 тыс. изделий соответственно. По договорам компания поставляет продукцию четырем заказчикам C_1, C_2, C_3 и C_4, каждому из которых требуется 15, 20, 20 и 30 тыс изделий еженедельно. Стоимости производства и транспортировки 1 тыс. изделий с фабрики M_1 каждому из заказчиков составляют 13, 17, 17 и 14 ден. единиц соответственно; аналогичные стоимости для фабрики M_2 равны 18, 16, 16 и 18 ден. единиц, а для фабрики M_3 – 12, 14, 19 и 17 ден. единиц. Определить оптимальный план производства и транспортировки продукции, минимизирующий общие затраты компании.

Вариант 8.

Две фабрики K_1 и K_2 производят электронное оборудование, объемы выпуска которого за некоторый период для каждой фабрики составляют соответственно 16 и 12 тыс. изделий. Продукция фабрик поставляется к трем потребителям C_1, C_2, C_3, которым за тот же период времени требуется 10, 13 и 7 тыс. изделий. Стоимости перевозок одной тыс. изделий с фабрики K_1 трем потребителям равны соответственно 5, 4 и 6 ден. единиц, а с фабрики K_2 – 6, 3 и 2 ден единицы. Найти оптимальный план перевозки продукции с фабрики потребителям, при котором общие затраты на перевозку будут наименьшими.

Вариант 9.

Четыре сталелитейных завода C_1, C_2, C_3 и C_4 производят еженедельно 950, 300, 1350 и 450 т стали соответственно. Потребителям А, В, С и Д еженедельно нужно 250, 1000, 700 и 1100 т стали, а стоимости перевозок 1т стали с заводов потребителям для завода C_1 равны 12, 16, 21 и 19 ден. единиц, для завода C_2 – 4, 4, 9 и 5 ден. единиц, для завода C_3 – 3, 8, 14 и 10 ден. единиц, а для завода C_4 – 24, 33, 36 и 34 ден единиц соответственно. Составить план транспортировки стали с заводов потребителям, чтобы минимизировать общую стоимость перевозок.

Вариант 10.

Компания владеет тремя заводами А, В и С, объемы производства которых за некоторый период времени составляют 6, 3 и 3 тыс. единиц продукции. Компания поставляет продукцию в четыре города M_1, M_2, M_3 и M_4, которым требуется 1,5; 2,5; 2,7 и 3,3 тыс. единиц продукции соответственно. Стоимости транспортировки единицы продукции с завода А в города M_1, M_2, M_3 и M_4 равны соответственно 1, 4, 1 и 9 ден. единиц; аналогичные стоимости для завода В равны 9, 2, 2 и 8 ден. единиц, а для завода С – 6, 1, 7 и 3 ден. единицы соответственно. Составьте оптимальный план перевозок продукции в города, минимизирующий общие затраты на перевозки.

Студент должен выполнить в установленный срок контрольную работу.

Прежде чем приступить к выполнению работы, необходимо ознакомиться с соответствующими разделами программы курса, а затем подобрать рекомендованную программой литературу, изучить ее, обратив особое внимание на технику расчета и метод построения показателей.

При оформлении решения задач контрольной работы, необходимо руководствоваться следующими требованиями.

Перед решением задачи привести ее условие.

Решение задачи сопровождать формулами, развернутыми расчетами, краткими определениями и пояснениями показателей. Если имеется несколько методов расчета того или иного показателя, то применить нужно наиболее простой из них, указав при этом и другие возможные способы решения. Индексы необходимо вычислять с точностью до 0,001, проценты – до 0,1, а заработную плату, производительность труда – в рублях, численность работников – в человеках.

При решении задач нужно проверять производимые расчеты, пользуясь взаимосвязью между исчисляемыми показателями, а также обращая внимание на экономическое содержание результатов. Задачи, по которым будут даны ответы без развернутых расчетов, пояснений, определений показателей и кратких выводов, считаются нерешенными.

Контрольная работа оформляется в ученической тетради, пишется от руки, разборчиво, без помарок и сокращений (кроме общепринятых), страницы нумеруются. Необходимо оставлять широкие поля для замечаний рецензента и исправлений (дополнений), вносимых студентом после рецензирования. В конце работы приводится список использованной литературы (автор, название, издательство, год издания, глава, параграф, страница). Работа подписывается студентом с указанием даты ее выполнения.

Таблица соотношения начальной буквы фамилии студента и варианта контрольных заданий

Начальная буква фамилии	Вариант задания
А, Б, В	Первый
Г, Д, Е	Второй
Ж, З, И	Третий
К, Л	Четвертый
М, Н	Пятый
О, П, Р	Шестой
С, Т, У	Седьмой
Ф, Х, Ц	Восьмой
Ф, Х, Ц	Девятый
Э,Ю,Я	Десятый

РЕКОМЕНДУЕМЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература:

1. Математика для экономистов [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.И. Макаров. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2016. — 264 с. — ISBN 978-5-406-05090-3. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/918834 — ЭБС BOOK.ru, по паролю
2. Математика для экономистов. Задачник [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.И. Макаров под ред., М.В. Мищенко под ред. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2016. — 358 с. — ISBN 978-5-406-04700-2. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/918106 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

Дополнительная литература:

3. Математика для экономистов [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.И. Макаров. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2015. — 264 с. — ISBN 978-5-406-04283-0. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/918784 — ЭБС BOOK.ru, по паролю
4. Математика и информатика [Электронный ресурс] : учебное пособие / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев, В.Б. Уткин. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2017. — 361 с. — Бакалавриат. — ISBN 978-5-406-00864-5. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/922019 — ЭБС BOOK.ru, по паролю