МАЭУ МУРМАНСКАЯ АКАДЕМИЯ ЭКОНОМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ

УТВЕРЖДАЮ
Начальник учебно-методического управления
__________ Ю.В. Бирюков
«21» февраля 2018 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

по выполнению домашней контрольной работы по дисциплине

МАТЕМАТИКА

по направлению подготовки:

38.03.04 «Государственное и муниципальное управление»

Направленность (профиль) образовательной программы:

«Региональное управление»

Мурманск, 2018 г.

МАТЕМАТИКА: Методические рекомендации по выполнению домашних контрольных работ / – Мурманск: ЧОУ ВО «МАЭУ», 2018. – 31 с.

МАТЕМАТИКА: Методические рекомендации по выполнению домашних контрольных работ: предназначены для обучающихся по направлению подготовки: 38.03.04 Государственное и муниципальное управление; Является единой для всех форм обучения.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель курса математики в системе подготовки – освоение необходимого математического аппарата.

Это необходимо для анализа моделирования и решения прикладных экономических задач, в том числе с использованием ЭВМ.

Задачи изучения математики как фундаментальной дисциплины состоят в развитии логического и алгоритмического мышления, в выработке умения моделировать реальные экономические процессы.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

РАЗДЕЛ 1 ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Тема 1 Матрицы и определители

Определение матрицы. Виды матриц. Транспонирование матриц. Алгебраические операции над матрицами. Определители второго, третьего порядков и матрицы n-го порядка. Теорема Лапласа. Присоединенная и обратная матрицы. Алгоритм вычисления обратной матрицы. Ранг матрицы как наивысший порядок ее миноров, отличных от нуля. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Линейная комбинация, линейная зависимость и независимость строк (столбцов) матрицы. Теорема о ранге матрицы — максимальном числе ее линейно независимых строк (столбцов). (1, гл.1, § 1.1-1.6; с.9-35); (2, гл.1).

Надо хорошо уяснить, что матрица — это прямоугольная таблица, составленная из mn чисел, расположенных в m строках и n столбцах. Необходимо знать, как устанавливаются размеры матрицы и ее порядок, уметь выполнять транспонирование матриц, алгебраические операции над ними (умножение матрицы на число, сложение, вычитание, умножение матриц).

Необходимо усвоить следующее: строки обозначаются индексом ”i”, столбцы индексом ”j”. Поэтому любой элемент матрицы можно обозначить a_{ij}. Это означает, что элемент a_{ij} находится в i-ой строке и в j-ом столбце. Например, a_{11} – элемент первой строки и первого столбца; a_{23}–элемент второй строки и третьего столбца. Индекс с «i» растет всегда «вниз», а индекс «j» – растет вправо.

Размер матрицы **m** х **n** означает, что конечные величины i и j равны соответственно m и n, т.е. $i_{кон}=m$, $j_{кон}=n$.

При вычислении определителей необходимо отметить, что определитель есть число и вычисляется по определенным правилам. Необходимо рассмотреть правило вычисления определителей второго порядка и правило треугольника или правило Сарруса для вычисления определителей третьего порядка.

В качестве универсального метода вычисления определителей необходимо рекомендовать вычисление на основе теоремы Лапласа.

Для этого нужно знать определение минора (вычисление), определение алгебраического дополнения $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ и саму теорему Лапласа. (1, пример 9, с. 25, с. 26).

Мало того, нужно обратить внимание и на то, что определители порядка больше трех вычисляются с помощью теоремы Лапласа.

Относительные трудности возникают при усвоении операции умножения матриц. Необходимо твердо усвоить формальное правило умножения (1, с. 12 – 13) и связанное с ним условие существования произведения AB матриц A и B: число столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B. Одна из особенностей операции умножения состоит в том, что произведение матриц в общем случае не коммутативно, т.е. $AB \neq BA$. Даже если A и B – квадратные матрицы, в общем случае $AB \neq BA$, в чем нетрудно убедиться на любом частном примере. Другая особенность произведения матриц состоит в том, что произведение двух ненулевых матриц может оказаться нулевой матрицей.

Например, можно легко показать, что произведение матриц есть нулевая матрица (сравните: во множестве действительных чисел произведение равно нулю тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю).

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & -3 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \\ -18 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нужно знать определение присоединенной и обратной матриц, уметь их вычислять, знать, что для существования матрицы A^{-1} , обратной матрице *A,* необходимо и достаточно, чтобы матрица *A* была невырожденной (неособенной). Проверить правильность вычисления обратной матрицы можно, составив произведение AA^{-1} или $A^{-1} A$. Если оно является единичной матрицей *E,* то, в соответствии с определением, матрица A^{-1} вычислена правильно.

Нужно уметь вычислять определители второго и третьего порядков (метод треугольника) и более высших порядков (1, пример 1.9, с.25, 26). При вычислении определителей нужно активно использовать свойства определителей 2,4,5,6,8. Теорему Лапласа нужно знать твердо и уметь ее использовать для практики.

Разобрать для усвоения материала по вычислению определителей задачи 1.19-1.21.

Вычисление обратной матрицы осуществлять по алгоритму, изложенному в (1). Нужно четко усвоить в алгоритме, что обратная к исходной матрице существует. После этого определяется транспонированная к исходной матрица. Именно для транспонированной матрицы A' ищутся алгебраические дополнения A_{ij}.

Из алгебраических дополнений к транспонированной матрице составляется присоединенная (союзная) матрица.

Если известна союзная матрица $\tilde{A}$ и определитель $|A|$ исходной матрицы, то вычисляется обратная матрица

$A^{-1}=\tilde{A}/|A|$.

Обратная матрица будет использоваться для решения систем линейных уравнений.

Для усвоения материала необходимо разобрать задачи (1, 1.15— 1.18, 1.22—1.29).

<u>Пример</u>: Найти матрицу C=B′·A′·A·B, если A=$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, B=$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

<u>Решение:</u>

Алгоритм решения:

1. Находим матрицы B′, A′, транспонированные к матрицам A и B.

A′=$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$, B′=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Находим произведение матриц:

B′·A′=$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Это возможно ибо число столбцов матрицы B′ равно числу строк матрицы A′.

3. Находим произведение матриц:

A·B=$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Находим произведение

C=B′·A′·A·B=$\begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$= (10)

<u>Ответ:</u> C = (10)

Тема 2 Система линейных уравнений

Система n линейных уравнений с n переменными (общий вид). Матрица системы. Матричная форма записи системы. Совместные (определенные и неопределенные) и несовместные системы. Теорема Крамера о разрешимости системы n линейных уравнений с n переменными (без доказательства).

Решение системы: по формулам Крамера; с помощью обратной матрицы; методом Гауса. (1, гл. 2, §2.1—2.3,2.6; с. 38—47,53—56); (2, гл. 2).

При изучении материала темы следует освоить матричную форму записи заданной системы *n* линейных уравнений с *n* переменными и уметь переходить к этой форме от общего вида системы и наоборот. Необходимо знать и уметь объяснить, какие системы уравнений называются совместными (определенными и неопределенными) и несовместными. Надо твердо уяснить, что вопрос о разрешимости системы *n* линейных уравнений с *n* переменными устанавливается с помощью теоремы Крамера (1, с. 41); решаются же такие системы различными способами: по формулам Крамера, с помощью обратной матрицы и методом Гаусса (см. примеры 2.1 – 2.3, 2.6, 2.7).

Наиболее важен для практики метод Гаусса, имеющий по сравнению с другими способами решения ряд достоинств: он менее трудоемок, позволяет однозначно установить, является ли данная система определенной, неопределенной или несовместной, а в случае совместности системы – определить число ее независимых уравнений и исключить «лишние».

В методе Гаусса нужно усвоить правило исключения неизвестных x_1, x_2, …, x_{n-1}. Сначала умножается первая строка на соответствующие коэффициенты. Цель – в первом столбце во всех строках кроме первой обеспечить нули путем прибавления первой строки, умноженной на коэффициенты, ко второй и последующим строкам.

Затем умножается вторая строка на соответствующие коэффициенты. Цель – обеспечить нули во втором столбце во всех строках кроме второй ($a_{22} \neq 0$) путем прибавления к третьей и последующим строкам второй строки, умноженной на необходимые коэффициенты и т.д.

Для первой строки это коэффициенты ($-a_{21}/a_{11}$;$-a_{31}/a_{11}$;…;$-a_{m1}/a_{11}$); для второй строки это коэффициенты ($-a_{32}/a_{22}$;$-a_{42}/a_{22}$;…;$-a_{m2}/a_{22}$).

Необходимо понять, что при прямом ходе решения системы уравнений методом Гаусса определяется неизвестное x_n. Затем при обратном ходе определяются x_{n-1}, x_{n-2} и так до x_1.

Необходимо уяснить, что метод Гаусса менее трудоемок особенно при решении систем уравнений более четвертого порядка.

Следует обратить внимание на различие между основными или базисными переменными, для которых определитель матрицы из коэффициентов при них отличен от нуля ($x_1, x_2, \ldots, x_r$—переменные). Остальные (n–r) переменных называются не основными или свободными.

Необходимо усвоить, что для базисных решений должны быть равны нулю все (n-r) не основных переменных, и что число базисных решений имеется не более $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

Необходимо разобраться (теорема Кронекера-Капелли) в том, что система имеет единственное решение в том случае, когда ранг матрицы «r» равен числу переменных «n», т.е. r=n; система имеет бесконечное множество решений, если n >r.

Необходимо разобраться в алгоритме нахождения базисных решений, а именно: научиться находить все определители, не равные нулю, которые и составляются из коэффициентов при основных (базисных) переменных, выражать основные (базисные) решения через не основные. Иметь понятие о функциональной системе решений для системы линейных однородных уравнений.

Рекомендуется разобрать задачи с решениями N 2.1 – 2.3, 2.6, 2.7 и задачи ля самостоятельной работы N 2.11, 2.12, 2.15 – 2.18, 2.21 – 2.23 по учебнику [1] и аналогичные задачи по практикуму [2].

Тема 3 Векторы

Векторы на плоскости и в пространстве (сложение, вычитание, умножение на число). Координаты и длина вектора, n-мерный вектор. Линейная комбинация, линейная зависимость и независимость векторов. Понятие о векторном (линейном) пространстве и его базисе. Собственные *векторы и собственные значения матрицы. Характеристический многочлен матрицы.* (1, гл. 3, § 3.1 – 3.3, 3.7; с. 63 – 66, 68 – 72, 82 – 84); (2, гл. 3).

Необходимо рассмотреть и усвоить понятие вектора, обозначения векторов, определение длины векторов, определение коллинеарных векторов, противоположных векторов. Изучить операции сложения и вычитания векторов на плоскости и в пространстве. Правило параллелограмма, многоугольника, параллелепипеда.

Надо уяснить, что скалярное произведение векторов это произведение модулей их длин на косинус угла между ними, а скалярное произведение в координатах равно сумме произведений соответствующих координат. Разобрать задачи с решениями (1,3.14–3.17).

Необходимо разобраться с понятием n-мерного вектора и векторного пространства, изучить свойства векторного пространства.

Множества всех плоских и пространственных векторов, для которых определены операции сложения и умножения, а также умножения вектора на число, являются простейшими примерами векторных пространств. В данной теме обобщается понятие вектора и дается определение векторного пространства.

Необходимо уяснить понятие линейной комбинации, линейной зависимости и линейной независимости векторов, а именно: линейная комбинация векторов $a_1,a_2,\ldots,a_n$ векторного пространства R равна сумме произведений этих векторов на произвольные действительные числа ($a_m=\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\ldots+\lambda_{m-1}a_{m-1}$). Линейно зависимые векторы (как и строки матрицы) - это такие векторы, для которых существуют такие числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ не равные нулю одновременно такие, что $\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\ldots+\lambda_ma_m=0$. Линейно независимые - это вектора, для которых $\lambda_1a_1+\lambda_2a_2+\ldots+\lambda_ma_m=0$ возможно только при одновременном равенстве нулю всех чисел $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$.

В случае линейной зависимости векторов, по крайней мере, один из них выражается через остальные.

Необходимо уяснить, что любой вектор пространства может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса.

Особую роль в приложениях математики играют векторы, обладающие следующим свойством: при умножении квадратных матриц на них образуются новые векторы, коллинеарные исходным. Такие векторы получили название собственных векторов матрицы, а соответствующие им числа – собственных значений матрицы. Точное определение собственных векторов и значений приведено в (1, с. 82).

Рекомендуется разобрать задачи с решениями N 3.2, 3.3, 3.7 и задачи для самостоятельной работы N 3.18 – 3.20, 3.27, 3.28 по учебнику (1) и аналогичные задачи по практикуму (2).

РАЗДЕЛ II ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Тема 4 Функции

Понятие о множествах. Действительные числа и числовые множества. Постоянные и переменные величины. Функции и способы их задания. Область определения функции. Четные, нечетные, монотонные и ограниченные функции. Сложная функция. Понятие элементарной функции. Основные элементарные функции и их графики. Неявные функции. (гл. 4, § 4.1 – 4.3, 4.6; с. 95 – 99, 100 – 103,.115 – 117); (2, гл. 5,4).

Прежде всего, полезно ознакомиться с некоторыми логическими символами и кванторами, чтобы использовать их в дальнейшем для сокращения записей (1, с. 123).

Изучение темы следует начать с основных понятий теории множеств , [1, с. 123 – 124]. Далее нужно четко усвоить важнейшее понятие математического анализа – функции, уметь находить область ее определения, знать три способа задания функции: аналитический, графический, табличный.

Студенту нужно знать простейшие преобразования для построения функций, как-то: сдвиг графика $y=f(x+a)+b$ вправо при $a < 0$ и влево при $a > 0$, а также на $|b|$ параллельно оси Ох вниз при $b< 0$ и вверх на $|b|$ при $b >0$; сжатие $0<m<1$ (растяжение $m >1$) графика функции $y=m\cdot f(x)$ вдоль оси Ох.

В курсе рассматриваются в основном элементарные функции. Студент должен уяснить определение элементарной функции (1, с. 132) четко знать свойства и строить графики следующих основных элементарных функций: $y=C$ (постоянная), $y=x^n$ (степенная), $y=a^x$ (показательная), $y=log_a x$ (логарифмическая). Необходимо усвоить понятие сложной функции (функции от функции).

Построение графика четной (нечетной) функции можно значительно упростить, если учесть, что графики четных функций симметричны относительно оси *Oy,* а нечетных – относительно начала координат. Одним из характерных свойств функции является монотонность (т.е. возрастание или убывание на каком-либо промежутке).

Студенту необходимо уяснить, что функции находит широкое применение в экономической теории. Знать конкретные виды функций и их сущность (функция полезности, функция издержек и т.д.).

Уравнение линии на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении, через две данные точки. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Точка пересечения двух прямых. (1, гл. 5, § 5.1–5.5, 5.7, с. 123–132, 138, 139).

Студенту необходимо прочно усвоить материал, который будет использован при изучении экономико-математических методов и прикладных моделей (линейное программирование). Большое значение здесь имеет определение уравнения линии на плоскости как уравнения с двумя переменными x и y, которому удовлетворяют координаты каждой точки этой линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на ней. Из этого определения следуют два важных для практики положения, которые нужно знать:

1. Если задано уравнение линии, то можно установить, принадлежит ли ей какая-либо точка плоскости. Для этого достаточно подставить координаты точки в уравнение линии вместо переменных x и y. Если окажется, что они удовлетворяют уравнению, то точка принадлежит линии, в противном случае – не принадлежит.

2. Координаты точки пересечения двух линий, заданных своими уравнениями, удовлетворяют обоим уравнениям. Поэтому для нахождения координат точки пересечения двух линий нужно решить систему, составленную из их уравнений. Этот вопрос должен быть усвоен твердо.

Студент должен знать простейшие виды уравнений прямой и уметь пользоваться ими при решении задач. Соответствующий учебный материал приведен в (1, с.95–99, 100–103,115–116).

Обратите особое внимание на нахождение уравнений прямых, параллельной и перпендикулярной данной прямой (пример 4.5).

Рекомендуется разобрать задачи с решениями N4.1–4.3, 4.5, 4.10, 4.12 и задачи для самостоятельного решения N 4.14–4.19, 4.21–4.23 по учебнику (1) и аналогичные задачи по практикуму (2).

Тема 5 Пределы и непрерывность

Предел числовой последовательности. Предел функции в бесконечности и точке. Бесконечно малые величины и их свойства. Бесконечно большие величины. Основные теоремы о пределах: теорема единственности, предел суммы, произведения, частного. Признаки существования предела. Второй замечательный предел. Число е. Понятие о натуральных логарифмах. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Основные теоремы о непрерывных функциях. Вычисление пределов. (1, гл.6, § 6.1–6.7); (2, гл.6).

Необходимо ознакомиться с определением предела числовой последовательности (1, с.141, 142) и его геометрической интерпретацией; понять определение предела функции в точке (1, с.143–146) и в бесконечности и познакомиться с их геометрической интерпретацией.

Суть предела числовой последовательности в том, что для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon>0$ можно найти номер числовой последовательности ($N=N(\varepsilon)$), что для всех членов последовательности с номерами $n>N$ верно неравенство $|a_n-A|<\varepsilon$.

Весьма важным являются понятия бесконечно малых и бесконечно больших величин (1, с.147-153), суть которых сводится к тому, что при своем изменении бесконечно малая (по абсолютной величине) будет меньше любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon<0$, а бесконечно большая будет больше любого сколько угодно большого числа $M>0$.

Нужно знать взаимосвязь бесконечно больших и бесконечно малых величин, с помощью которых доказываются теоремы о пределах. Следует обратить внимание на признаки существования пределов, особенно на теорему 1 (1, с.155), часто позволяющую установить наличие предела значительно проще, чем при использовании его определения.

Необходимо (без вывода) знать второй замечательный предел в двух формах записи: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=e$ и $\lim\limits_{y\to\infty}(1+y)^{1/y}=e$.

Понятие непрерывности функции (в точке, на промежутке) является более простым, чем предел, так как оно выражается непрерывностью графика при прохождении данной точки, данного промежутка (без отрыва карандаша от листа бумаги). Наряду с интуитивным представлением надо знать определение непрерывности функции в точке и на промежутке, свойства непрерывных функций (1, с. 161 – 166), а также то, что всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке области определения и может иметь разрыв лишь на границах области определения.

Необходимо ознакомиться с теоретическими вопросами и дать на них ответы.

Рекомендуется разобрать задачи с решениями N 6.1-6.3, 6.5, 6.6, . 6.8, 6.9-6.11, 6.13, 6.14 и задачи для самостоятельной работы N 6.18, 6.20–6.27, 6.33–6.36, 6.38–6.41 по учебнику (1) и аналогичные задачи по практикуму (2).

РАЗДЕЛ III ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Тема 6 Производная

Задачи, приводящие к понятию производной. Производная, ее геометрический, механический и экономический смысл. Уравнение касательной к плоской кривой; Дифференцируемость функции. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции (необходимый признак дифференцируемости). Основные правила и основные формулы дифференцирования. Производная сложной функции Производные высших порядков. (1, гл. 7, § 7.1 – 7.7, с. 176 – 205); (2, гл. 7).

Необходимо изучить задачи, приводящие к понятию производной: задачи о касательной и задачи о скорости движения (1, с.176, 177), задачи о производительности труда (экономический смысл производной).

После этого нужно усвоить определение производной как предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю. Нужно знать обозначение производной, алгоритм ее вычисления, основываясь на теории пределов.

Студент обязан понимать геометрический и механический смысл производной (1,с.178, 181), уметь решать простейшие задачи по вычислению производной на основе алгоритма ее вычисления; знать и уметь применять основные правила дифференцирования, вычислять производную сложной и обратной функций. При этом нужно знать четко правила вычисления элементарных функций (1,с. 188,193), знать наизусть таблицу производных

(1, с.192). Это позволит усвоить дифференцирование сложных функций, обратных функций, неявно заданных функций (1, с.193), находить производные от произведения, суммы, разности, а также вычислять производные высших порядков. Нужно знать использование понятия производной в экономике, понятие эластичности функции, свойства эластичности функции.

Изучая материал этой темы, студенты знакомятся с необходимым условием дифференцируемости функции. Необходимо четко уяснить, что из дифференцируемости функции в некоторой точке следует ее непрерывность в этой точке. Обратная теорема несправедлива, так как существуют непрерывные функции, которые в некоторых точках могут не иметь производной (1, с. 179, 180).

Рекомендуется разобрать задачи с решениями N 7.1–7.8, 7.10, 7.13, 1.15–7.17 и задачи для самостоятельной работы N 7.20–7.29, 7.35, 7 42, 7.43, 7.46–7. 49 по учебнику (1) и аналогичные задачи по практикуму (2).

Для усвоения темы нужно решить задачи контрольной работы, ответить письменно на теоретические вопросы в контрольной работе.

Тема 7 Приложения производной

Правило Лопиталя ('без вывода), Теорема Ролля и Лагранжа (с нестрогими геометрическими доказательствами). Признаки возрастания и убывания функции. Экстремум функции. Необходимые и достаточные признаки экстремума (второй достаточный признак – без доказательства). Исследование функции (область определения, четность и нечетность, интервалы монотонности и точки экстремума, поведение функции при $x \to \pm\infty$ *и в точках разрыва, горизонтальные и вертикальные асимптоты, точки пересечения графика с осями координат) и построние ее графика. Квадратичная функция* $y = ax^2+bx+c$ *и ее график. Дробно-линейная функция у*

$= \dfrac{ax+b}{cx+d}$ *и ее график.* (1, гл. 8, § 8.1 – 8.5, 8.7 – 8.9; с. 205–21, 225–236); (2, гл. 8).

Нужно уяснить, что правило Лопиталя является эффективным средством вычисления пределов. При этом нужно понимать, что предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций заменяется вычислением отношения их производных. Это правило можно использовать для вычисления целого ряда неопределенностей.

С помощью производных можно эффективно исследовать функции на возрастание и убывание, определять экстремумы функций (1,с.216, 217), наибольшее и наименьшее значение. Для этого необходимо знать теоремы о достаточных условиях возрастания и убывания функции, определения точек минимума и максимума, первое и второе достаточное условие экстремума, определение выпуклости и вогнутости функции (выпуклости вниз). Необходимо знать общую схему исследования функции, кроме п.6,7 (1, с.232).

В учебном пособии приведена схема исследования функции для нахождения характерных точек и особенностей, по которым можно построить ее график (1, с. 232). Выполнение пункта 6' этой схемы, связанного с нахождением интервалов выпуклости функции и точек перегиба, в программу не входит.

Рекомендуется разобрать задачи с решениями е 8.1–8.3, 8.4–8.7; 8.9, 8.11–8.15, 8.17 и задачи для самостоятельной работы N 8.19–8.31, 8.32–8.34, 8 41–8.53 по учебнику (1) и аналогичные задачи по практикуму (2), обратив особое внимание на исследование функций и построение их графиков.

Таблица соотношения начальной буквы фамилии студента и варианта контрольных заданий

Начальная буква фамилии	Вариант задания
А, Е, Л	Первый
Р, Х, Э	Второй
Б, Ж, М	Третий
С, Ц, Ю	Четвертый

В, З, Н	Пятый
Т, Ч	Шестой
Г, И, О	Седьмой
У, Ш	Восьмой
Д, К, П	Девятый
Ф, Щ, Я	Десятый

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ДОМАШНЕЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

ВАРИАНТ №1

Раздел 1 «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии»

Задание №1 Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса.
- по формулам Крамера,
- методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

Задание №2 Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 14. \end{cases}$$

Задание №3 На плоскости даны три точки А, В, С. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника АВС,
- точку М, симметричную точке А относительно стороны ВС,
- уравнение медианы ВК.

А (2,3); В (1,3); С (-6,-4).

Задание №4 Построить кривые по заданным уравнениям

а) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$; в) $\dfrac{x^2}{49} - \dfrac{y^2}{25} = 1$;

б) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; г) $y^2 = 9x$.

<u>Раздел 2 «Математический анализ»</u>

Задание №5 Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+1}{3-x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$

Задание №6 Найти производные функций: а) $y=\dfrac{x^2+1}{2x+3}$; б) $y=2\sqrt{\sin x}$**.**

Задание №7 Исследовать функцию и построить график: y = $\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$.

Задание №8 Найти экстремумы функций двух переменных

$$z = 2x^3 + 6xy^2 - 30x - 24y.$$

ВАРИАНТ №2

<u>Раздел 1 «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии»</u>

Задание №1 Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса,
- по формулам Крамера,
- методом обратной матрицы.

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3=5\\2x_1+3x_2+x_3=1\\2x_1+x_2+3x_3=11\end{cases}$$

Задание №2 Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases}5x_1+7x_2+4x_3+6x_4+6x_5=2,\\15x_1+30x_2+7x_3+8x_4+3x_5=-13,\\9x_1+6x_2+5x_3+8x_4+9x_5=9,\\6x_1+9x_2+3x_3+4x_4+3x_5=-1.\end{cases}$$

Задание №3 На плоскости даны три точки А, В, С. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника АВС,
- точку М, симметричную точке А относительно стороны ВС,
- уравнение медианы ВК.

А (1,1); В (-3,3); С (-5,-2).

Задание №4 Построить кривые по заданным уравнениям

а) $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$; в) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$;

б) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{4} = 1$; г) $y^2 = 7x$.

<u>Раздел 2 «Математический анализ»</u>

Задание №5 Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^3 - 125}{x - 5}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1 + x^3}{x^2 + x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - \frac{2}{3x}\right)^{x+3}$

Задание №6 Найти производные функций: а) $y = \frac{5}{x^3} + 3\sqrt{x}$; б) $y = 3e^{-2x}$.

Задание№7 Исследовать функцию и построить график: $y = \frac{x^3 + x}{x^2 + 2x + 3}$.

Задание №8 Найти экстремумы функций двух переменных

$$z = x^3 - y^3.$$

ВАРИАНТ №3

<u>Раздел 1 «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии»</u>

Задание №1 Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса,
- по формулам Крамера,
- методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

Задание №2 Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 6, \\ 14x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 9x_4 - x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 7, \\ 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$$

Задание №3 На плоскости даны три точки A, B, C. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника ABC,
- точку M, симметричную точке A относительно стороны BC,
- уравнение медианы BK.

A (1,2); B (-2,3); C (-2,-3).

Задание №4 Построить кривые по заданным уравнениям

а) $(x+1)^2+(y-2)^2=16$; в) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$;

б) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$; г) $y^2=5x$.

Раздел 2 «Математический анализ»

Задание №5 Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-9x}{x^2-3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x-1}{x^3-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^x$.

Задание №6 Найти производные функций: а) $y=\frac{x^2+1}{2x+3}$; б) $y=\ln(2x-1)$.

Задание№7 Исследовать функцию и построить график: $y=\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

Задание №8 Найти экстремумы функций двух переменных

$z=6x^2y+2y^3-24x-30y$.

ВАРИАНТ №4

Раздел 1 «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии»

Задание №1 Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса,
- по формулам Крамера,
- методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=4 \\ 5x_1+x_2+2x_3=2 \\ 3x_1-x_2+x_3=1 \end{cases}$$

Задание №2 Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 15x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 23, \\ 3x_1 + 20x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -8, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x - x_4 + 3x_5 = 1, \\ 9x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 12. \end{cases}$$

Задание №3 На плоскости даны три точки А, В, С. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника ABC,
- точку М, симметричную точке А относительно стороны ВС,
- уравнение медианы ВК.

А (2,1); В (-3,2); С (-1,-4).

Задание №4 Построить кривые по заданным уравнениям

а) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$; в) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{259} = 1$;

б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; г) $y^2 = 16x$.

<u>Раздел 2 «Математический анализ»</u>

Задание №5 Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2 - x}{x - 3x^2 + 4x^3}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 1}{x - 3x^2}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{3}{4x}\right)^{x-2}$.

Задание №6 Найти производные функций: а) $y = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}x^4$; б) $y = \sin 5x$

Задание№7 Исследовать функцию и построить график: $y = \frac{x^3}{x^2 + 2x - 3}$.

Задание №8 Найти экстремумы функций двух переменных

$z = x^3 - 8y^3 - 6xy + 1$.

ВАРИАНТ №5

<u>Раздел 1 «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии»</u>

Задание №1 Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса,
- по формулам Крамера,
- методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Задание №2 Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 13x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 8, \\ 11x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 7, \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x + 4x_4 + 6x_5 = 4, \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$$

Задание №3 На плоскости даны три точки A, B, C. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника ABC,
- точку M, симметричную точке A относительно стороны BC,
- уравнение медианы BK.

A (1,3); B (-2,2); C (-3,-5).

Задание №4 Построить кривые по заданным уравнениям

а) $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 4$; в) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$;

б) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$; г) $y^2 = 3x$.

Раздел 2 «Математический анализ»

Задание №5 Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 - 5x^3}{x - 2x^2 + 6x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x-3}\right)^x$.

Задание №6 Найти производные функций: а) $y = 2^x + x^2$; б) $y = arctg 3x$

Задание№7 Исследовать и построить график: $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$.

Задание №8 Найти экстремумы функций двух переменных

$$z = x^3 - xy^2 + 3x^2 + y^2 - 1.$$

ВАРИАНТ №6

Раздел 1 «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии»

Задание №1 Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса,
- по формулам Крамера,
- методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Задание №2 Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 7, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_5 = -4, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 6. \end{cases}$$

Задание №3 На плоскости даны три точки A, B, C. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника ABC,
- точку M, симметричную точке A относительно стороны BC,
- уравнение медианы BK.

A (3,1); B (-3,1); C (2,-3).

Задание №4 Построить кривые по заданным уравнениям

а) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$; в) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$;

б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; г) $y^2 = 4x$.

Раздел 2 «Математический анализ»

Задание №5 Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^2 + 8x^3}{x + 2x^3 - x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+2x} - 1}$.

Задание №6 Найти производные функций: а) $y = 3tgx - \sqrt{x}$; б) $y = (5x^2 + 3)^6$.

Задание№7 Исследовать функцию и построить график: $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

Задание №8 Найти экстремумы функций двух переменных

$$z = x^2y - \frac{1}{3}y^3 + 2x^2 + 3y^2 - 1.$$

ВАРИАНТ №7

Раздел 1 «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии»

Задание №1 Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса,
- по формулам Крамера,
- методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 11 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -7 \end{cases}$$

Задание №2 Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 7, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5, \\ 11x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = -5. \end{cases}$$

Задание №3 На плоскости даны три точки A, B, C. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника ABC,
- точку M, симметричную точке A относительно стороны BC,
- уравнение медианы BK.

A (2,2); B (-1,3); C (0,-5) .

Задание №4 Построить кривые по заданным уравнениям

а) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$; в) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{49} = 1$;

б) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$; г) $y^2 = -4x$.

Раздел 2 «Математический анализ»

Задание №5 Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

Задание №6 Найти производные функций: а) $y=-3x^{-5}+15x^{-4}$; б) $y=e^{x^3}$.

Задание №7 Исследовать функцию и построить график: $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2}}{x}$.

Задание №8 Найти экстремумы функций двух переменных

$$z = x^3 + 6xy + 3y^2 - 18x - 18y.$$

ВАРИАНТ №8

Раздел 1 «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии»

Задание №1 Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса,
- по формулам Крамера,
- методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=5 \\ x_1-3x_2+3x_3=7 \\ 5x_1-3x_2+3x_3=7 \end{cases}$$

Задание №2 Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4-2x_5=1, \\ 4x_1-10x_2+5x_3-5x_4+7x_5=1, \\ 2x_1-14x_2+7x_3-7x_4+11x_5=-1. \end{cases}$$

Задание №3 На плоскости даны три точки А, В, С. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника АВС,
- точку М, симметричную точке А относительно стороны ВС,
- уравнение медианы ВК.

А (3,2); В (-2,1); С (-5,-5).

Задание №4 Построить кривые по заданным уравнениям

а) $(x-5)^2+(y+3)^2=4$; в) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{25}=1$;

б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{49}=1$; г) $y^2 = -2x$.

Раздел 2 «Математический анализ»

Задание №5 Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-4}{\sqrt{x^8+3x^4-x}}$.

Задание №6 Найти производные функций: а) $y=4x^{\frac{3}{4}}+4x^{\frac{1}{2}}+3x$;

б) $y=3\ln x-x^2$.

Задание№7 Исследовать функцию и построить график: $y=\frac{x^3+1}{x^2-2x+2}$.

Задание №8 Найти экстремумы функций двух переменных

$$z = x^2y - y^3 - x^2 - 3y^2 + 3.$$

ВАРИАНТ №9

Раздел 1 «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии»

Задание №1 Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса,
- по формулам Крамера ,
- методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 16 \end{cases}$$

Задание №2 Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

Задание №3 На плоскости даны три точки А, В, С. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника АВС,
- точку М, симметричную точке А относительно стороны ВС,
- уравнение медианы ВК.

А (2,3); В (-1,2); С (-4,-4) .

Задание №4 Построить кривые по заданным уравнениям

а) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 16$; в) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$;

б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$; г) $y^2 = -6x$.

<u>Раздел 2 «Математический анализ»</u>

Задание №5 Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{5x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Задание №6 Найти производные функций: а) $y=\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{x^2}$;

б) $y=\sin(x+\frac{1}{x})$.

Задание№7 Исследовать функцию и построить график: $y=1-\frac{4}{x^2}$.

Задание №8 Найти экстремумы функций двух переменных

$z = 3x^2 - 6xy - y^3 - 12x + 12y$.

ВАРИАНТ №10

<u>Раздел 1 «Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии»</u>

Задание №1 Решить систему линейных уравнений тремя методами:

- методом Гаусса,
- по формулам Крамера,

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8 \\ -2x_1+3x_2-3x_3=-5 \\ 3x_1-4x_2+5x_3=10 \end{cases}$$

- методом обратной матрицы.

Задание №2 Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 7x_5 = -2. \end{cases}$$

Задание №3 На плоскости даны три точки А, В, С. Найти методами векторной алгебры:

- площадь треугольника АВС,
- точку М, симметричную точке А относительно стороны ВС,
- уравнение медианы ВК.

А (3,3); В (-1,1); С (0,-7).

Задание №4 Построить кривые по заданным уравнениям

а) $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$; в) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{64} = 1$;

б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$; г) $y^2 = -x$.

<u>Раздел 2 «Математический анализ»</u>

Задание №5 Вычислить пределы: а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 2x}$.

Задание №6 Найти производные функций: а) $y = 3\ln x - x^3$; б) $y = \cos^2 x$.

Задание№7 Исследовать функцию и построить график: $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$.

Задание №8 Найти экстремумы функций двух переменных

$z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Основные понятия о матрицах.
2. Операции над матрицами.
3. Определители квадратных матриц.
4. Свойства определителей.
5. Обратная матрица.
6. Ранг матрицы.
7. Основные понятия системы линейных уравнений.
8. Метод обратной матрицы.
9. Метод Крамера.
10. Метод Гаусса.
11. Уравнение линии на плоскости.
12. Уравнение прямой.
13. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой.
14. Понятие функции. Основные свойства функций.
15. Предел числовой последовательности.
16. Предел функции в бесконечности и в точке.
17. Бесконечно малые величины и их свойства.
18. Бесконечно большие величины.
19. Основные теоремы о пределах.
20. Замечательные пределы.
21. Непрерывность функции.
22. Определение производной. Основные правила дифференцирования.
23. Производная сложной функции.
24. Основные теоремы дифференциального исчисления.
25. Правило Лопиталя.
26. Возрастание и убывание функции.
27. Экстремум функции.
28. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.
29. Выпуклость функции. Точки перегиба.
30. Асимптоты графика функции.
31. Понятие дифференциала функции.
32. Частные производные первого порядка.
33. Частные производные высших порядков.
34. Экстремумы функций двух переменных.
35. Условный экстремум.
36. Метод наименьших квадратов.

РЕКОМЕНДУЕМЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Математика (для бакалавров). Учебник [Электронный ресурс] : учебник / И.Ю. Седых, С.Я. Криволапов, А.Ю. Шевелев. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2019. — 719 с. — ISBN 978-5-406-05914-2. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/929527 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

2. Математика для экономистов. Задачник [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.И. Макаров под ред., М.В. Мищенко под ред. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2016. — 358 с. — ISBN 978-5-406-04700-2. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/918106 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1.Математика для экономистов (математический анализ и линейная алгебра). Задачник (для бакалавров). Учебное пособие [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.И. Макаров, М.В. Мищенко. - Электрон. текстовые данные. - Москва : КноРус, 2018. - 358 с. - ISBN 978-5-406-06423-8. - Режим доступа: <https://www.book.ru/book/930056> - ЭБС BOOK.ru, по паролю

2.Математика для экономистов и менеджеров (для бакалавров). Учебник [Электронный ресурс] : учебник / Н.Ш. Кремер. - Электрон. текстовые данные. - Москва : КноРус, 2019. - 480 с. - ISBN 978-5-406-03461-3. - Режим доступа: <https://www.book.ru/book/931154> - ЭБС BOOK.ru, по паролю

3.Математика для экономистов и менеджеров [Электронный ресурс] : учебник / Н.Ш. Кремер под общ. ред. и др. - Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2017. — 480 с. — Для бакалавров. — ISBN 978-5-406-03461-3. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/926385 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

4.Математика для экономистов и менеджеров. Практикум [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2017. — 480 с. — Для бакалавров. — ISBN 978-5-406-03462-0. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/927668 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

5.Математика для экономистов [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.И. Макаров. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2016. — 264 с. — ISBN 978-5-406-05090-3. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/918834 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

6.Математика для экономистов [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.И. Макаров. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2015. — 264 с. — ISBN 978-5-406-04283-0. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/918784 — ЭБС BOOK.ru, по паролю

7.Математика и информатика [Электронный ресурс] : учебное пособие / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев, В.Б. Уткин. – Электрон. текстовые данные. — Москва : КноРус, 2017. — 361 с. — Бакалавриат. — ISBN 978-5-406-00864-5. - Режим доступа: https://www.book.ru/book/922019 — ЭБС BOOK.ru, по паролю